



Белорусская государственная  
орденов Октябрьской Революции  
и Трудового Красного Знамени  
сельскохозяйственная академия



# Курс лекций



## ВВЕДЕНИЕ

Цель данного курса лекций – помочь студентам-заочникам усвоить основные понятия и утверждения учебной дисциплины на доступном для понимания уровне, сформировать ключевые компетенций, связанные с пониманием значимости дисциплины в освоении их будущей профессии. Курс лекций подготовлен в соответствии с программой дисциплины для экономических специальностей заочной формы обучения. Весь учебный материал разделен на отдельные лекции, связанные с определенной темой. В каждой лекции излагается необходимый теоретический минимум, приводится решение типовых примеров, предлагается система упражнений для усвоения и закрепления каждой темы. В случае необходимости читатель может изучить или восстановить в памяти доказательства некоторых формул и теорем, используя рекомендуемую литературу.

Данный курс лекций может быть использован и другими категориями студентов, готовящимися к сдаче зачетов и экзаменов по высшей математике в высших учебных заведениях.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика : Общий курс / А. И. Яблонский [и др.]. – Минск : Вышэйш. шк., 2000.
2. Мацкевич, И. П. Высшая математика : Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид. – Минск : Вышэйш. шк., 1993.
3. Кузнецов, А. В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Савкович, Н. И. Холод. – Минск : Вышэйш. шк., 2001.
4. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск : Вышэйш. шк., 2001.
5. Мацкевич, И. П. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид, Г. М. Булдык. – Минск : Вышэйш. шк., 1996.
6. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие для вузов : в 4 ч./ под ред. А. П. Рябушко. – 3-е изд. – Минск : Вышэйш. шк., 2007.
7. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1972.
8. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1975.



9. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Высш. шк., 1987.

10. Лихолетов, И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Лихолетов. – Минск : Вышэйш. шк., 1976.

11. Лихолетов, И. И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И. И. Лихолетов, И. П. Мацкевич. – Минск : Вышэйш. шк., 1976.

12. Шипачёв, В. С. Высшая математика / В. С. Шипачёв. – 7-е изд. – М. : Высш. шк., 2005.

13. Математика в экономике / А. С. Солодовников [и др.]. – М. : Финансы и статистика, 2001.

14. Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М. : Инфра, 2006.

15. Высшая математика для экономистов : учебник : в 3 т. /И. В. Гайшун [и др.]. – Минск : БГЭУ.-Т. 2 : Теория вероятностей в экономике. Методы оптимизации и экономические модели.

## Лекция 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

### 1.1. Понятие матрицы. Действия над матрицами

**Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов. Числа таблицы называются **элементами матрицы**.

Обозначается матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Запись  $a_{ij}$  означает, что элемент  $a_{ij}$  находится на пересечении строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$ .

Матрица, состоящая из одного столбца, называется **матрицей-столбцом**, а состоящая из одной строки – **матрицей-строкой**.

Запись  $A_{m \times n}$  означает, что матрица  $A$  имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов, а запись  $m \times n$  называется **размерностью матрицы**. Если при этом  $m=n$ , то матрица называется **квадратной**. Число строк (столбцов) квадратной матрицы называется её **порядком**. У квадратной матрицы элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  образуют **главную диагональ**.



Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Если все элементы главной диагонали диагональной матрицы равны единице, то матрица называется *единичной* и обозначается  $E$ . Если у квадратной матрицы поменять местами строки и соответствующие столбцы, то полученная матрица будет называться *транспонированной*.

Умножение матрицы на число, сложение и вычитание матриц называются *линейными операциями над матрицами*.

При умножении матрицы на число на это число умножается каждый элемент матрицы:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При сложении и вычитании матриц их размерности должны быть одинаковыми.

Суммой матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрица  $C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$

Обозначается сумма матриц  $C = A + B$ .

Разностью матриц  $A$  и  $B$  называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначается разность матриц  $C = A - B$ .

Таким образом, при сложении матриц элементы, стоящие на одинаковых местах в обеих матрицах, складываются, а при вычитании – вычитаются.



Наиболее сложной операцией является умножение матрицы на матрицу. Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы  $A$  равна  $m \times n$ , а матрицы  $B$  —  $n \times k$ .

Произведением матриц  $A$  и  $B$  называется такая матрица  $C$ , элемент  $c_{ij}$  которой равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ . Обозначается произведение  $C = A \cdot B$  (или  $C = AB$ ). Следует иметь в виду, что умножение двух матриц возможно лишь в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Такие матрицы называются **согласованными**. Поэтому в общем случае  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . Размерность же матрицы  $C$  при умножении матриц  $A$  и  $B$  будет равна  $m \times k$ .

Пример 1. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Найти матрицу  $2A - 3B$ .

Решение.  $2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} -$   
 $-\begin{pmatrix} 6 & -3 & 15 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$

Пример 2. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Найти про-

изведение матриц  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ .

Решение. Так как размерность матрицы  $A$  равна  $2 \times 3$ , а размерность матрицы  $B$  равна  $3 \times 2$ , то в результате умножения матрицы  $A$  на матрицу  $B$  получится матрица размерности  $2 \times 2$ :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$



$$= \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 18 & 4 \end{pmatrix}.$$

Результатом умножения матрицы  $B$  на матрицу  $A$  будет матрица

размерности  $3 \times 3$ :  $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 17 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Из этого примера видно, что  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

Пример 3. Найти  $A^2$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ .

Решение.  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1+4+3 & 2+6-4 & -1-4-3 \\ 2+6+6 & 4+9-8 & -2-6-6 \\ -3+8-9 & -6+12+12 & 3-8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 14 & 5 & -14 \\ -4 & 18 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 1.2. Определители и их свойства

Пусть дана квадратная матрица второго порядка  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

**Определителем данной матрицы, или просто определителем второго порядка,** называется число  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Обозначается

определитель  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ , т. е.  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .



**Определителем квадратной матрицы третьего порядка**

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  называется число, обозначаемое символом  $\Delta =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и равно } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Если из определителя третьего порядка вычеркнуть  $i$ -ю строку и  $j$ -й столбец, на пересечении которых находится элемент  $a_{ij}$ , то оставшиеся элементы образуют определитель второго порядка, который называется **минором определителя третьего порядка** к элементу  $a_{ij}$ . Обозначается минор  $M_{ij}$ . Например, элементу  $a_{12}$  соответствует минор

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минор к элементу  $a_{ij}$ , взятый со знаком «+», если сумма  $i+j$  номеров строк и столбца чётная, или со знаком «-», если сумма  $i+j$  нечётная, называется **алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$**  и обозначается  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

**Пример 4.** Найти алгебраическое дополнение числа 3 в определителе  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ .

**Решение.** Так как число 3 находится на пересечении второй строки и первого столбца, то вычёркиваем эти строку и столбец и получаем минор, соответствующий числу 3:  $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2$ . Алгебраическое дополнение этого элемента  $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$ .

Рассмотрим квадратную матрицу порядка  $n$ :



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Теорема Лапласа.** *Определитель матрицы  $n$ -го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (любого столбца) матрицы на их алгебраические дополнения.*

Например, для первой строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \text{ Такая запись}$$

называется **разложением определителя по элементам первой строки**.

**Основные свойства определителя:**

- 1) если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю;
- 2) при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный;
- 3) определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю;
- 4) общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя;
- 5) определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число;
- 6) при транспонировании определителя, т. е. при замене его строк, столбцами с теми же номерами, величина определителя не меняется.

Пример 5. Вычислить определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ .

Решение. Все элементы первой строки, кроме первого, обратим в нули. Для этого:

- 1) ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на  $-2$ ;



- 2) к третьему столбцу прибавим первый, умноженный на 3;  
3) к четвёртому столбцу прибавим первый, умноженный на  $-3$ .

В результате получим определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 9 & -4 \\ -1 & 6 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 8 & -7 \end{vmatrix}$ . Разло-

жим этот определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 9 & -4 \\ 6 & -2 & 7 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 9 & -4 \\ 6 & -2 & 7 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix}. \text{ К первой строке прибавим}$$

третью, умноженную на  $-3$ , а ко второй прибавим третью, умноженную на 6. В результате получим определитель, который разложим по элементам первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -15 & 17 \\ 0 & 46 & -35 \\ -1 & 8 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -15 & 17 \\ 46 & -35 \end{vmatrix} = -(-15 \cdot (-35) - 17 \cdot 46) = 257.$$

Пример 6. Вычислить определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ 248 & 256 & 254 \\ 167 & 169 & 170 \end{vmatrix}$ .

Решение. Ко второй строке определителя прибавим первую, умноженную на  $-3$ , а к третьей прибавим первую, умноженную на  $-2$ .

Тогда  $\Delta = \begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \{ \text{ко второй строке прибавим третью} \} =$

$$\begin{vmatrix} 83 & 85 & 84 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \{ \text{разложим определитель по элементам второй строки} \} =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 83 & 85 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4(-83 - 85) = 672.$$



### 1.3. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

Уравнение, содержащее переменные только в первой степени и не имеющее произведений переменных, называется *линейным*.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $x_1$  и  $x_2$  :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ , составленный из коэффициентов при

неизвестных, называется главным *определителем системы*. Составим определитель  $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ , который получается из главного

определителя системы заменой в нём коэффициентов при неизвестной  $x_1$  соответствующими свободными членами. Аналогично составим определитель  $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ , заменив в главном определителе системы столбец коэффициентов при неизвестной  $x_2$  столбцом свободных членов.

Если определитель системы не равен нулю, то справедливы *формулы Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

Аналогично для решения системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$



**формулы Крамера** примут вид  $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$ ,  $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$ ,  $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$ , где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Формулы Крамера можно использовать и для решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными при условии, что определитель системы отличен от нуля.

**Пример 7.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 3x - 4y = 17, \\ 2x + 5y = -4. \end{cases}$

**Решение.** Определитель системы  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - (-8) = 23$  от-

личен от нуля. Следовательно, для её решения можно применить формулы Крамера. Найдём определители  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 85 - 16 = 69, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 34 = -46.$$

Тогда по формулам Крамера  $x = \frac{69}{23} = 3$ ,  $y = \frac{-46}{23} = -2$ .

**Пример 8.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 19, \\ 4x + 2y - 5z = -3, \\ 3x - y + 2z = 11. \end{cases}$

**Решение.** Найдём определитель системы  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 60$ .

Так как  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера. Заменяем в определителе системы столбец с коэффициентами при  $x$  столбцом свободных членов и найдём опре-







$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + a_{13}^0 x_3 + \dots + a_{1n}^0 x_n = b_1^0, \\ a_{22}^0 x_2 + a_{23}^0 x_3 + \dots + a_{2n}^0 x_n = b_2^0, \\ a_{33}^0 x_3 + \dots + a_{3n}^0 x_n = b_3^0, \\ \dots \\ 0 \cdot x_n = b_k^0, \end{cases}$$

где  $k \leq n$ , т. е. число уравнений системы меньше либо равно числу неизвестных. Эта система не имеет решений, так как последнее уравнение не будет выполняться ни при каких значениях переменной  $x_n$ ;

в) ступенчатая система вида

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + \dots + a_{1k}^0 x_k + \dots + a_{1n}^0 x_n = b_1^0, \\ a_{22}^0 x_2 + \dots + a_{2k}^0 x_k + \dots + a_{2n}^0 x_n = b_2^0, \\ \dots \\ a_{kk}^0 x_k + \dots + a_{kn}^0 x_n = b_k^0 \end{cases}$$

имеет бесчисленное множество решений. Из последнего уравнения неизвестная  $x_k$  выражается через неизвестные  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ . Затем в предпоследнее уравнение вместо неизвестной  $x_k$  подставляется её выражение через неизвестные  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ . Продолжая обратный ход метода Гаусса, неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_k$  можно выразить через неизвестные  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ . В этом случае  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  называются **свободными** и могут принимать любые значения.

При практическом решении систем удобно выполнять все преобразования не с системой уравнений, а с расширенной матрицей системы, состоящей из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = -5, \\ 2x + 4y - 3z = 22, \\ 5x - 3y + 2z = -3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и выполним элементарные преобразования:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & -3 & 22 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 18 & -11 & 76 \\ 0 & 6 & 1 & 16 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 18 & -11 & 76 \\ 0 & 0 & 84 & -168 \end{array} \right).$$

В результате исходная система свелась к эквивалентной системе



$$\begin{cases} 3x - 3y + z = -5, \\ -18y - 11z = 76, \\ 84z = -168. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим  $z = -2$ . Подставим это значение во второе уравнение:  $18y - 11 \cdot (-2) = 76$ ,  $y = 3$ . В первое уравнение подставим найденные значения  $y$  и  $z$ :  $3x - 3 \cdot 3 - 2 = -5$ ,  $x = 2$ .

Таким образом, решением данной системы уравнений является  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $z = -2$ .

Пример 10. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 15, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 25. \end{cases}$$

Решение. Выполним элементарные преобразования над расширенной матрицей системы:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 15 \\ 6 & -3 & 2 & 25 \end{array} \right) &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 12 & 2 & -16 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -8 \end{array} \right) &\Rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 22 & 44 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{array} \right) &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\Rightarrow \end{aligned}$$



$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right). \text{Полученная матрица соответствует системе}$$

$$\text{уравнений} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11, \\ 7x_2 - 3x_3 = -13, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Решая данную систему, найдём:  $x_3 = 2$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_1 = 3$ .

**Пример 11.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -6. \end{cases}$$

**Решение.** Запишем расширенную матрицу системы и выполним элементарные преобразования:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -5 & 8 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & -5 & -3 & 9 & -6 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -14 & 14 \\ 0 & 7 & 7 & -14 & 14 \\ 0 & -7 & -7 & 14 & -14 \end{array} \right) \Rightarrow$$
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{I} & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

В результате получена система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \end{cases}$$

эквивалентная исходной.



Так как уравнений на два меньше, чем неизвестных, то из второго уравнения  $x_2 = 2 - x_3 + 2x_4$ . Подставим выражение для  $x_2$  в первое уравнение:  $2x_1 - 3(2 - x_3 + 2x_4) + x_3 + 4x_4 = 2$ ,  $x_1 = 4 - 2x_3 + x_4$ .

Таким образом, формулы  $\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_3 + x_4, \\ x_2 = 2 - x_3 + 2x_4 \end{cases}$  дают общее решение

данной системы уравнений. Неизвестные  $x_3$  и  $x_4$  являются свободными и могут принимать любые значения.

Пусть, например,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 2$ . Тогда  $x_1 = 4 - 2 \cdot 1 + 2 = 4$  и  $x_2 = 2 - 1 + 2 \cdot 2 = 5$ . Решение  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 2$  является одним из частных решений системы, которых бесчисленное множество.

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти матрицу  $2A - 5B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

2. Вычислить определители:

а)  $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 25 & 34 & 42 \\ 51 & 69 & 83 \\ 101 & 135 & 169 \end{vmatrix}$ ;

д)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ ; е)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ .

3. Найти минор  $M_{23}$  для определителя матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .



4. Найти алгебраическое дополнение  $A_{31}$  для определителя матри-

цы 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера:

а)  $\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 2x - 3y = 7; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 5x + 2y = -18; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} 8x - 6y = -5, \\ 3x + 5y = 9; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -6, \\ 4x_1 + 5x_2 = 32; \end{cases}$

д)  $\begin{cases} 2x - 3y + z = -5, \\ 3x + y - 4z = 9, \\ x - 2y - 5z = 2; \end{cases}$  е)  $\begin{cases} 3x + y - 5z = -20, \\ 2x - y + 7z = 26, \\ x + y + z = 4; \end{cases}$  ж)  $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8, \\ 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 12. \end{cases}$

6. Решить системы уравнений методом Гаусса:

а)  $\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 9, \\ 3x + 2y - 4z = -5, \\ 4x - y + 3z = 11; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 11; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -9, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1; \end{cases}$

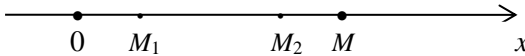
д)  $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 13x_3 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + 16x_3 = 13; \end{cases}$  е)  $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 13x_3 - 9x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 11x_4 = 14, \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 14, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 13x_4 = 28. \end{cases}$



## Лекция 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

### 2.1. Координаты на прямой, на плоскости и в пространстве

Возьмём произвольную прямую  $X$  и выберем на ней положительное направление слева направо. Прямую с выбранным на ней направлением назовём осью. На оси возьмём произвольную точку  $O$  и назовём её началом отсчёта, относительно которого будем определять положение всех точек этой оси. Затем выберем единицу масштаба для измерения длин. Ось с выбранным на ней масштабом называют **числовой осью**, или **числовой прямой**. Числовая прямая представляет простейшую **декартову систему координат**.



Пусть на числовой прямой отрезок задан точками  $M_1$  и  $M_2$  и указано, что точка  $M_1$  называется началом, а точка  $M_2$  — концом отрезка. Такой отрезок называется **направленным** и обозначается  $\overline{M_1M_2}$ . **Величиной направленного отрезка** называется его длина, взятая со знаком «+», если направление отрезка совпадает с направлением оси, и со знаком «-», если эти направления противоположны.

Возьмём на координатной оси точку  $M$ . Отрезок  $\overline{OM}$  является направленным. **Координатой точки  $M$**  называется величина направленного отрезка  $\overline{OM}$ . Обозначим координату точки  $M$  через  $x$ , т. е.  $x = OM$ . Тогда запись  $M(x)$  означает, что точка  $M$  имеет координату  $x$ .

Пусть на координатной оси даны точки  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$ . В этом случае величина направленного отрезка  $\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1$ . Расстояние  $d$  между точками определяется по формуле

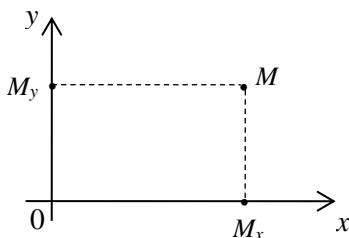
$$d = |\overline{M_1M_2}| = |x_2 - x_1|.$$

**Пример 1.** Даны точки  $M_1(5)$  и  $M_2(-1)$ . Величина направленного отрезка  $\overline{M_1M_2}$  равна  $-6$ , а расстояние между точками  $M_1$  и  $M_2$  равно  $|\overline{M_1M_2}| = |-1 - 5| = 6$ .



Положение точки на прямой определяется одним числом – её координатой.

Положение точки на плоскости определим следующим образом. Возьмём на плоскости две взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в точке  $O$ , зададим масштаб для измерения длины. Точку  $O$  назовём *началом координат*. В результате получим *декартову прямоугольную систему координат на плоскости*. Одна ось  $Ox$  называется *осью абсцисс*, а другая ось  $Oy$  – *осью ординат*. Эти оси называются *координатными осями*.



Возьмём в прямоугольной системе координат произвольную точку  $M$ . Пусть  $Mx$  – проекция точки  $M$  на ось  $Ox$ ,  $My$  – проекция точки  $M$  на ось  $Oy$ . Тогда  $x = Mx$ ,  $y = My$  называются *прямоугольными координатами точки* на плоскости. Запись  $M(x, y)$  означает, что точка  $M$  имеет координаты  $x$  и  $y$ .

Пусть на плоскости в прямоугольной системе координат даны точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . Тогда расстояние между этими точками определяется по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Пример 2.** Даны точки  $M_1(5, 2)$  и  $M_2(-3, 8)$ . Найти расстояние между ними и расстояние от точки  $M_1$  до начала координат.

**Решение.** По условию примера  $x_1 = 5$ ,  $y_1 = 2$ ,  $x_2 = -3$ ,  $y_2 = 8$ . Тогда  $|M_1M_2| = \sqrt{(-3-5)^2 + (8-2)^2} = 10$ . Расстояние от точки  $M_1$  до начала координат равно  $d = \sqrt{(5-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{29}$ .



Пример 3. Даны точки  $A(1, 1)$ ,  $B(-3, 4)$ ,  $C(3, 12)$ . Вычислить периметр треугольника  $ABC$ .

Решение. Периметр  $p$  треугольника  $ABC$  равен сумме длин всех его сторон. Найдём длины сторон треугольника:

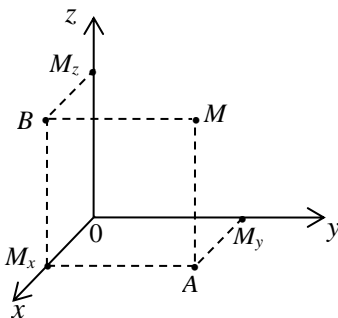
$$|AB| = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-1)^2} = 5,$$

$$|BC| = \sqrt{(3-(-3))^2 + (12-4)^2} = 10,$$

$$|AC| = \sqrt{(3-1)^2 + (12-1)^2} = 5\sqrt{5}.$$

$$\text{Тогда } p = 5 + 10 + 5\sqrt{5} = 5(3 + \sqrt{5}).$$

Возьмём в пространстве три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке  $O$ , которую назовём *началом координат*, и зададим единицу измерения длины (масштаб). Одну ось  $Ox$  назовём *осью абсцисс*, вторую  $Oy$  – *осью ординат* и третью ось  $Oz$  – *осью аппликат*. Координатные оси, взятые попарно, определяют три взаимно перпендикулярные плоскости  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $xOz$ , которые называются *координатными плоскостями*.



Пусть  $M$  – произвольная точка пространства. Спроектируем точку  $M$  на координатные плоскости  $xOy$  и  $xOz$  (точки  $A$  и  $B$ ). Проекцией точки  $A$  на ось  $Ox$  является точка  $M_x$ , а на ось  $Oy$  – точка  $M_y$ . Проекцией точки  $B$  на ось  $Oz$  является точка  $M_z$ . Таким образом, точки  $M_x, M_y$  и  $M_z$  являются проекциями точки  $M$  на координатные оси. Величины



$OM_x$ ,  $OM_y$  и  $OM_z$  называются **координатами точки  $M$** . Первая координата  $x = OM_x$  называется **абсциссой**, вторая  $y = OM_y$  – **ординатой** и третья  $z = OM_z$  – **аппликатой**. Запись  $M(x, y, z)$  означает, что точка  $M$  имеет координаты  $x, y, z$ .

Если в пространстве известны координаты точек  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то расстояние между ними определяется по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пусть через точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  проходит некоторая ось. Пусть известно, что точка  $C(x, y, z)$  делит направленный отрезок  $\overline{M_1M_2}$  на два направленных отрезка  $\overline{M_1C}$  и  $\overline{CM_2}$  в отношении  $\lambda$ . Это означает, что  $\overline{M_1C} = \lambda \cdot \overline{CM_2}$ , т. е.  $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ ,  $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$ ,  $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$ . Отсюда находим координаты точки  $C$ :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

## 2.2. Векторы. Основные понятия

Величина, которая характеризуется только своим численным значением, называется **скалярной**. Примерами скалярных величин являются вес, температура, площадь, длина. Величина, которая характеризуется не только своим численным значением, но и направлением, называется **векторной**. Примерами векторных величин являются скорость, ускорение, сила.

**Вектором** называется **направленный отрезок**. Если начало вектора находится в точке  $A$ , а конец вектора находится в точке  $B$ , то вектор обозначается  $\overline{AB}$  или просто  $\vec{a}$ . Длина вектора равна длине отрезка, соединяющего точки  $A$  и  $B$ . Если точки  $A$  и  $B$  совпадают, то длина вектора равна нулю и вектор называется **нулевым**. Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

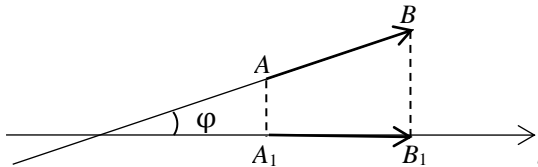


Векторы называются **коллинеарными**, если они имеют одинаковые направления либо противоположно направлены. Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковые длины и одинаково направлены. Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Следовательно, если некоторую точку в пространстве взять за общее начало, то от этой точки можно отложить все рассматриваемые векторы. В этом смысле все векторы можно рассматривать как **свободные**.

Если два вектора имеют одинаковые длины и противоположное направление, то они называются **противоположными**. Для вектора  $\vec{a}$  противоположный ему вектор обозначается  $\vec{-a}$ .

Векторы, которые лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются **компланарными**. Если компланарные векторы привести к одному началу, то они будут лежать в одной плоскости.

Пусть дана ось  $l$  и вектор  $\vec{AB}$ . Пусть начало  $A$  вектора проектируется в точку  $A_1$  на оси  $l$ , а конец  $B$  вектора – в точку  $B_1$ .



Рассмотрим вектор  $\vec{A_1B_1}$ . **Проекцией вектора  $\vec{AB}$**  на ось  $l$  называется число  $|\vec{A_1B_1}|$ , если направление вектора  $\vec{A_1B_1}$  совпадает с направлением оси  $l$ , и число  $-|\vec{A_1B_1}|$ , если вектор  $\vec{A_1B_1}$  и ось  $l$  имеют противоположные направления. Проекция вектора  $\vec{AB}$  на ось  $l$  обозначается  $\text{Пр}_l \vec{AB}$ . Обозначим через  $\varphi$  угол между вектором  $\vec{AB}$  и осью  $l$ . Тогда  $\text{Пр}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \cos \varphi$ .



Если в качестве оси  $l$  взять какой-либо вектор, то можно говорить о проекции одного вектора на другой. Например, проекция вектора  $\overline{AB}$  на вектор  $\overline{CD}$  равна  $\text{Pr}_{\overline{CD}} \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$ . Иногда вместо выражения «проекция вектора  $\overline{AB}$  на вектор  $\overline{CD}$ » используют выражение «проекция вектора  $\overline{AB}$  на направление вектора  $\overline{CD}$ ».

Рассмотрим вектор  $\overline{AB}$  в прямоугольной системе координат. **Координатами вектора  $\overline{AB}$**  называются его проекции на координатные оси. Запись  $\overline{a} = (x, y, z)$  означает, что вектор  $\overline{a}$  в пространстве имеет координаты  $x, y, z$ .

Два вектора  $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$  будут **равны тогда и только тогда, когда равны их одноименные координаты**, т. е.

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Пусть начало вектора задано точкой  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , а конец вектора – точкой  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Тогда для определения координат вектора  $\overline{M_1M_2}$  **от координат конца вектора вычитаются координаты его начала**, т. е.  $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

В прямоугольной системе координат в пространстве единичные векторы направления осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  обозначим через  $\overline{i}$ ,  $\overline{j}$  и  $\overline{k}$ . Эти единичные векторы, называемые **ортами**, составляют **прямоугольный базис**. Любой вектор  $\overline{a} = (x, y, z)$  пространства может быть разложен единственным образом по **прямоугольному базису  $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$** , т. е. представлен в виде  $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ , где числа  $x, y, z$  – координаты вектора  $\overline{a} = (x, y, z)$ .



Пример 4. Даны точки  $M_1(1, -3, 5)$  и  $M_2(4, 2, -3)$ . Найти координаты вектора  $\overline{M_1M_2}$  и записать разложение этого вектора по ортам.

Решение. Если заданы координаты начала и конца вектора, то для определения координат вектора из координат его конца вычитаются координаты начала:  $\overline{M_1M_2} = (4-1, 2-(-3), -3-5) = (3, 5, -8)$ .

Разложение вектора по ортам имеет следующий вид:  
 $\overline{M_1M_2} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 8\bar{k}$ .

### 2.3. Линейные операции над векторами

Сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число называются *линейными операциями над векторами*.

Пусть даны векторы  $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ . Суммой векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называется вектор  $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ , т. е. *при сложении векторов их одноименные координаты складываются*. Аналогично  $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ , т. е. *при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются*.

При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число: если  $\bar{c} = a\bar{a}$ , то  $\bar{c} = (ax_1, ay_1, az_1)$ . В этом случае вектор  $\bar{c}$  будет коллинеарен вектору  $a\bar{a}$ . Обозначим  $\bar{c} = (x, y, z)$ . Тогда из равенства  $\bar{c} = a\bar{a}$  следует, что  $x = ax_1$ ,  $y = ay_1$ ,

$z = az_1$ . А это означает, что  $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = a$ . Таким образом, *если два*

*ненулевых вектора коллинеарны, то их одноименные координаты пропорциональны*. Верно и обратное: *если одноименные координаты двух векторов пропорциональны, то эти векторы коллинеарны*.

Пример 5. Даны векторы  $\bar{a} = (2, -3, 1)$  и  $\bar{b} = (1, -1, 0)$ . Найти координаты вектора  $2\bar{a} - 3\bar{b}$ .

Решение. Так как при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, а при вычитании векторов вычитаются их соответствующие координаты, то



$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1, 2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-1), 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = (1, -3, 2).$$

Пример 6. При каких значениях  $m$  и  $n$  векторы  $\vec{a} = (3, 2, m)$  и  $\vec{b} = (6, n, 10)$  коллинеарны?

Решение. Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны:  $\frac{3}{6} = \frac{2}{n} = \frac{m}{10}$ . Тогда  $\frac{2}{n} = \frac{1}{2}$  и  $\frac{m}{10} = \frac{1}{2}$ , т. е.  $n = 4$  и  $m = 5$ .

## 2.4. Скалярное произведение векторов

*Скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ .*

Так как  $|\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ , а  $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b}$ , то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b}.$$

Таким образом, *скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого вектора на направление первого.*

Пусть векторы  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  заданы своими координатами. Тогда *скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных координат:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Если же два вектора равны, т. е.  $\vec{a} = (x, y, z)$  и  $\vec{b} = (x, y, z)$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2$ . Отсюда следует, что  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , т. е. *длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.*

Из определения скалярного произведения двух векторов можно найти *угол между векторами:*

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ или } \cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$



Если два вектора взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, так как  $\cos \varphi = \cos 90^\circ = 0$ . И, наоборот, если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы взаимно перпендикулярны. Таким образом, **необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ или } x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

**Пример 7.** Вычислить скалярное произведение векторов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 3\sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 6$ , а угол между векторами  $\varphi = 30^\circ$ .

**Решение.** По определению скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \text{ т. е. } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27.$$

**Пример 8.** Вычислить скалярное произведение векторов

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC}, \text{ если } A(3, -1, 0), B(2, 1, 4), C(2, -1, -2).$$

**Решение.** Найдём координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ :

$$\overline{AB} = (2-3, 1-(-1), 4-0) = (-1, 2, 4),$$

$$\overline{AC} = (2-3, -1-(-1), -2-0) = (-1, 0, -2).$$

Так как известны координаты векторов, то их скалярное произведение равно:  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) = -7$ .

**Пример 9.** Вычислить скалярное произведение векторов  $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ .

**Решение.** По условию примера  $\vec{a} = (3, -4, 1)$  и  $\vec{b} = (2, 3, 1)$ . Тогда  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -5$ .

**Пример 10.** Найти длину вектора  $\vec{a} = (4, 3, -1)$ .

**Решение.** Так как длина вектора  $\vec{a} = (x, y, z)$  и определяется по формуле  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , то  $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ .



Пример 11. Найти длину вектора  $\vec{b} - \vec{a}$ , если известны векторы  $\vec{a} = (3, 2, -1)$  и  $\vec{b} = (6, 6, -1)$ .

Решение. Вначале вычислим координаты вектора  $\vec{b} - \vec{a}$ :  
 $\vec{b} - \vec{a} = (6 - 3, 6 - 2, -1 - (-1)) = (3, 4, 0)$ . Тогда

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5.$$

Пример 12. Даны векторы  $\vec{a} = (3, -1, -1)$  и  $\vec{b} = (1, 3, 5)$ . Найти проекцию вектора  $2\vec{a} - \vec{b}$  на вектор  $\vec{a} + \vec{b}$ .

Решение. Найдём координаты этих векторов:

$$2\vec{a} - \vec{b} = (5, -5, -7), \quad \vec{a} + \vec{b} = (4, 2, 4).$$

$$\text{Тогда } \text{Пр}_{\vec{a} + \vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{5 \cdot 4 + (-5) \cdot 2 + (-7) \cdot 4}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = -3.$$

Пример 13. Найти угол между векторами  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ .

Решение. Так как по условию  $\vec{a} = (1, 1, 0)$  и  $\vec{b} = (1, 0, 1)$ , то

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}. \text{ Таким образом, угол}$$

между векторами  $\varphi = 60^\circ$ .

### Задания для самостоятельной работы

1. Даны векторы  $\vec{a} = (2, -3, 5)$ ,  $\vec{b} = (6, 4, -7)$ ,  $\vec{c} = (-2, 9, 1)$ . Найти векторы  $3\vec{a}$ ,  $4\vec{a} + \vec{b}$ ,  $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = (3, -5, 8)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, -4)$ . Найти длины векторов  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ .

3. Даны вершины треугольника  $A(7, 5, -4)$ ,  $B(4, 9, 1)$ ,

$C(6, -3, -7)$ . Найти длину медианы, проведённой из вершины  $A$ , и периметр треугольника.



4. Точки  $A(9, -11, 5)$ ,  $B(7, 4, -2)$ ,  $C(-7, 13, -3)$  являются последовательными вершинами ромба. Найти четвёртую вершину, вычислить периметр ромба и длины его диагоналей.

5. Вычислить скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ .

6. Вычислить скалярное произведение векторов  $\vec{a} = (4, 2, -5)$  и  $\vec{b} = (2, 6, 4)$ .

7. Найти угол между векторами  $\vec{a} = (4, -10, 1)$  и  $\vec{b} = (11, -8, -7)$ .

8. Дан треугольник с вершинами  $A(1, 7, 2)$ ,  $B(5, -3, 3)$ ,  $C(12, -1, -5)$ . Найти внутренние углы этого треугольника.

9. Вычислить проекцию вектора  $\vec{a} = (1, -2, 2)$  на вектор  $\vec{b} = (2, 10, 11)$ .

10. Даны векторы  $\vec{a} = (2, -3, 5)$  и  $\vec{b} = (6, 4, -7)$ . Найти проекцию вектора  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  на вектор  $\vec{a} + \vec{b}$ .

11. Найти угол между векторами  $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ .

12. Найти, при каком значении  $m$  векторы  $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$  будут взаимно перпендикулярными.

13. Найти проекцию вектора  $\overline{AB}$  на вектор  $\overline{CD}$ , если известны точки  $A(2, -3, 4)$ ,  $B(5, -5, -2)$ ,  $C(1, 2, 3)$  и  $D(7, 4, 6)$ .

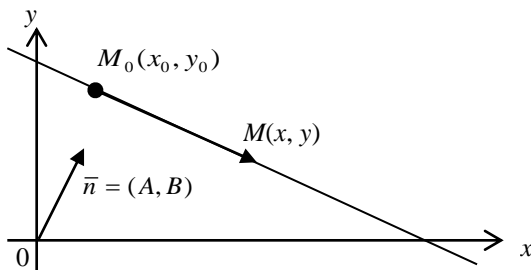
14. Даны вершины четырёхугольника  $A(1, -2, 2)$ ,  $B(1, 4, 0)$ ,  $C(-4, 1, 1)$  и  $D(-5, -5, 3)$ . Вычислить угол между его диагоналями.

## Лекция 3. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

### 3.1. Прямая линия на плоскости

Уравнением прямой называется такое уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки этой и только этой прямой.

Прямую на плоскости можно задавать различными способами.



Пусть в системе координат задан вектор  $\vec{n} = (A, B)$  и точка  $M_0(x_0, y_0)$ . Через точку  $M_0$  проведём прямую, перпендикулярную вектору  $\vec{n}$ , и на этой прямой возьмём произвольную точку  $M(x, y)$ . Тогда вектор  $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$  будет перпендикулярен вектору  $\vec{n}$ . Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0.$$

Полученное уравнение называется **векторным уравнением прямой**. Записав скалярное произведение в координатной форме, получим **уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору**:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Преобразуем это уравнение и получим **общее уравнение прямой** (или **уравнение прямой в общем виде**):  $Ax + By + C = 0$ , где  $C = -Ax_0 - By_0$ .

**Углом наклона  $\alpha$  прямой** к оси  $Ox$  называется угол, который отсчитывается в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, от положительного направления оси  $Ox$  до данной прямой. Тангенс угла наклона называется **угловым коэффициентом прямой** и обозначается  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

Уравнение вида  $y = kx + b$  называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Пусть даны точка  $M_0(x_0, y_0)$  и угловой коэффициент  $k$ . Тогда уравнение  $y - y_0 = k(x - x_0)$  называется уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении.

Пусть известны две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . Уравнение



$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$  называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ . Тогда угол  $\varphi$  между этими прямыми определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Если прямые параллельны, то  $\varphi = 0^\circ$  и, следовательно,  $k_1 = k_2$ . Это равенство является условием параллельности двух прямых. Если же прямые перпендикулярны, то  $\varphi = 90^\circ$  и  $1 + k_1k_2 = 0$  или  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ .

Это равенство является критерием перпендикулярности двух прямых.

Уравнение  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  называется уравнением прямой в отрезках, где  $a$  – отрезок, отсекаемый прямой на оси  $Ox$ , а  $b$  – отрезок, отсекаемый прямой на оси  $Oy$ .

**Пример 1.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2, -4)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (3, 2)$ .

**Решение.** Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору, имеет вид  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ . Так как по условию примера  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = -4$ ,  $A = 3$ ,  $B = 2$ , то  $3(x - 2) + 2(y + 4) = 0$ , или  $3x + 2y + 2 = 0$ .

**Пример 2.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-2, 3)$  под углом  $135^\circ$  к оси  $Ox$ .

**Решение.** Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом, имеет вид  $y - y_0 = k(x - x_0)$ . По условию примера  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = 3$ . Так как  $k = \operatorname{tg}\alpha$ , а  $\alpha = 135^\circ$ , то угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg}135^\circ = -1$ . Подставим в уравнение прямой:  $y - 3 = -1 \cdot (x + 2)$ , или  $y - 3 = -x - 2$ . Искомым уравнением прямой является  $x + y - 1 = 0$ .

**Пример 3.** Написать уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(2, -3)$  и  $M_2(1, -5)$ .



Решение. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, имеет вид  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ . Так как по условию примера  $x_1 = 2$ ,

$$y_1 = 3, x_2 = 1, y_2 = -5, \text{ то } \frac{x-2}{1-2} = \frac{y+3}{-5+3}, -2x+y+7=0.$$

Пример 4. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями  $y = 3x - 4$  и  $y = 2x + 1$ .

Решение. Угол между двумя прямыми определяется по формуле

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ . По условию  $k_1 = 2$  и  $k_2 = 3$ . Подставим в формулу:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3-2}{1+2 \cdot 3} = \frac{1}{7}, \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}.$$

Пример 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-2, 5)$  параллельно прямой  $2x + 3y - 5 = 0$ .

Решение. Так как искомая прямая должна быть параллельна данной, то по условию параллельности прямых их угловые коэффициенты должны быть равными, т. е.  $k_1 = k_2$ . Найдём угловой коэффициент  $k_1$

данной прямой:  $3y = -2x + 5, y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ , т. е.  $k_1 = -\frac{2}{3}$ . Тогда и

$k_2 = -\frac{2}{3}$ . Подставим в уравнение прямой, проходящей через заданную

точку с заданным угловым коэффициентом:  $y - 5 = -\frac{2}{3}(x + 2)$ ,

$$3(y - 5) = -2(x + 2), 2x + 3y - 11 = 0.$$

Пример 6. Прямая задана уравнением  $3x - 4y + 3 = 0$ . Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-1, 4)$  перпендикулярно данной прямой.

Решение. Так как искомая и данная прямые по условию перпендикулярны, то их угловые коэффициенты должны удовлетворять усло-

вию перпендикулярности  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ . Найдём угловой коэффициент  $k_1$

данной прямой:  $3x - 4y + 3 = 0, y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, k_1 = \frac{3}{4}$ . Следовательно,



$k_2 = -\frac{4}{3}$ . Подставим в уравнение прямой, проходящей через заданную

точку с заданным угловым коэффициентом:  $y - 4 = \frac{4}{3}(x + 1)$ ,

$4x + 3y - 8 = 0$ . Последнее уравнение является уравнением искомой прямой.

Пример 7. Уравнение  $3x - 4y - 24 = 0$  записать в виде уравнения прямой в отрезках.

Решение. Запишем уравнение в виде  $3x - 4y = 24$  и разделим обе части на 24:  $\frac{3x}{24} - \frac{4y}{24} = \frac{24}{24}$ , или  $\frac{x}{8} + \frac{y}{-6} = 1$ .

### 3.2. Плоскость

Уравнением плоскости называется такое уравнение с тремя неизвестными, которому удовлетворяют только точки данной плоскости.

С каждой плоскостью связан вектор, перпендикулярный данной плоскости. Этот вектор называется **нормальным вектором плоскости**. В качестве вектора нормали к плоскости можно взять любой вектор, перпендикулярный данной плоскости.

**Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (A, B, C)$** , имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Преобразуем данное уравнение и запишем его в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ . Полученное уравнение называется **общим уравнением плоскости**.

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

За угол между двумя плоскостями принимается угол между их нормальными векторами  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ , который определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



Если плоскости параллельны, то векторы  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  коллинеарны и их координаты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Эти равенства являются **условием параллельности двух плоскостей**.

Если же плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Это равенство представляет собой **условие перпендикулярности двух плоскостей**.

**Пример 8.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(2, -4, 1)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (1, -5, 2)$ .

**Решение.** Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору, имеет вид  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ . Так как по условию  $A = 1$ ,  $B = -5$ ,  $C = 2$ ,  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = -4$ ,  $z_0 = 1$ , то подставим эти значения в уравнение и получим:  $1 \cdot (x - 2) - 5 \cdot (y + 4) + 2 \cdot (z - 1) = 0$ , или  $x - 5y + 2z - 24 = 0$ .

**Пример 9.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $B(2, 4, -1)$  параллельно плоскости  $3x - 2y + z - 12 = 0$ .

**Решение.** Нормальный вектор плоскости  $\vec{n} = (3, -2, 1)$ . Так как искомая плоскость параллельна заданной, то в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять этот же вектор. Подставим координаты точки  $A$  и вектора  $\vec{n}$  в уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору:

$$3(x - 2) - 2(y - 4) + (z + 1) = 0, \text{ или } 3x - 2y + z + 3 = 0.$$

**Пример 10.** Определить угол между плоскостями  $2x + y - 2z + 3 = 0$  и  $x + y - 5z = 0$ .

**Решение.** Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами и определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



Запишем нормальные векторы для данных плоскостей:  
 $\vec{n}_1 = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$ . Подставим координаты этих векторов в формулу:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}}. \text{ Следовательно, } \varphi = 45^\circ.$$

Пример 11. Даны пары плоскостей:

а)  $3x - 4y + 5z - 3 = 0$  и  $6x - 8y + 10z + 5 = 0$ ;

б)  $2x - y + 5z - 5 = 0$  и  $4x + 3y - z + 1 = 0$ ;

в)  $x - 3y + z - 1 = 0$  и  $2x + 4y - 3z + 2 = 0$ .

Определить, какие из них параллельны, а какие – перпендикулярны.

Решение. а) Запишем нормальные векторы плоскостей:

$\vec{n}_1 = (3, -4, 5)$  и  $\vec{n}_2 = (6, -8, 10)$ . Так как координаты векторов пропорциональны  $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{5}{10}$ , то выполняется условие параллельности плоскостей, т. е. плоскости параллельны.

б) Нормальными векторами плоскостей являются векторы  $\vec{n}_1 = (2, -1, 5)$  и  $\vec{n}_2 = (4, 3, -1)$ . Скалярное произведение векторов  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 5 \cdot (-1) = 0$ , что является условием перпендикулярности плоскостей. Следовательно, плоскости перпендикулярны.

в) Плоскости имеют нормальные векторы  $\vec{n}_1 = (1, -3, 1)$  и  $\vec{n}_2 = (2, 4, -3)$ . Координаты этих векторов не пропорциональны, т. е.

$\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{1}{-3}$ , и скалярное произведение векторов не равно нулю:

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \neq 0$ . Следовательно, заданные плоскости не параллельны и не перпендикулярны.

### 3.3. Прямая в пространстве

С любой прямой в пространстве связан вектор, который лежит на данной прямой или на прямой, ей параллельной. Такой вектор называется **направляющим вектором прямой** и обозначается  $\vec{S} = (l, m, n)$ .

**Параметрическими уравнениями прямой**, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , называются уравнения



$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

где  $l, m, n$  – координаты направляющего вектора,  $t$  – параметр.

Исключим из этих уравнений параметр  $t$ :

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{l}, \\ t = \frac{y - y_0}{m}, \\ t = \frac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

На основании этого можно записать:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Полученные уравнения называются **каноническими уравнениями прямой**.

Пусть заданы точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . **Уравнение прямой, проходящей через две точки**, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

**Пример 12.** Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(1, -2, 3)$  параллельно вектору  $\vec{S} = (2, -1, 3)$ .

**Решение.** По условию  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = -2$ ,  $z_0 = 3$ ,  $l = 2$ ,  $m = -3$ ,  $n = 1$ . Подставим в параметрические и канонические уравнения пря-

мой и получим: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 3 + t \end{cases}$$
 и 
$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-3} = \frac{z - 3}{1}.$$

**Пример 13.** Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(1, -3, 2)$  и  $M_2(-1, 2, 4)$ .



Решение. Подставим координаты заданных точек в уравнение прямой, проходящей через эти точки:  $\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-(-3)}{2-(-3)} = \frac{z-2}{4-2}$  или

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-2}{2}. \text{ Последние уравнения являются каноническими}$$

уравнениями прямой, где  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = -3$ ,  $z_0 = 2$ ,  $l = -2$ ,  $m = 5$ ,  $n = 2$ . Подставим в параметрические уравнения прямой и получим

$$\text{искомые уравнения: } \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -3 + 5t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, нормальные векторы которых не коллинеарны:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Пример 14. Найти канонические уравнения прямой, являющейся линией пересечения двух плоскостей  $\begin{cases} 2x + y - 5z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$

Решение. Разрешим данную систему относительно  $x$  и  $y$ . Первое уравнение умножим на  $(-2)$ :  $\begin{cases} -4x - 2y + 10z - 6 = 0, \\ 3x + 2y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$  Сложим со вто-

рым и получим:  $-x + 6z - 4 = 0$ , или  $x = 6z - 4$ . Подставим в первое уравнение:  $2(6z - 4) + y - 5z + 3 = 0$ , или  $y = -7z + 5$ . Полученные ра-

венства разрешим относительно  $z$ :  $z = \frac{x+4}{6}$  и  $z = \frac{y-5}{-7}$ . Тогда можно

записать  $\frac{x+4}{6} = \frac{y-5}{-7} = \frac{z}{1}$ . Получены канонические уравнения прямой, являющейся линией пересечения двух данных плоскостей.

Пусть даны две прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

где  $\vec{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  и  $\vec{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  - их направляющие векторы. Угол между этими прямыми определяется по формуле



$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Прямые параллельны, если их направляющие векторы коллинеарны, т. е.  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ . Эти соотношения являются **условием параллельности двух прямых**.

Две прямые взаимно перпендикулярны, если их направляющие векторы  $\vec{S}_1$  и  $\vec{S}_2$  ортогональны. Следовательно, скалярное произведение этих векторов равно нулю, т. е.  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ . Это равенство выражает **необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых**.

Пример 15. Даны пары прямых:

а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}$  и  $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{-8}$ ;

б)  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{1}$  и  $\frac{x+2}{4} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{-8}$ ;

в)  $\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+4}{1}$  и  $\frac{x-6}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ .

Определить, какие из этих пар прямых параллельны, а какие – взаимно перпендикулярны.

Решение. а) Направляющие векторы прямых  $\vec{S}_1 = (2, -3, 4)$  и  $\vec{S}_2 = (-4, 6, -8)$ . Координаты векторов пропорциональны:  $\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{-8}{4} = -2$ . Так как условие параллельности прямых выполняется, то прямые параллельны.

б) Направляющими векторами прямых являются  $\vec{S}_1 = (3, -2, 1)$  и  $\vec{S}_2 = (4, 2, -8)$ . Их скалярное произведение равно нулю:  $3 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = 0$ . В данном случае выполняется условие перпендикулярности прямых, т. е. прямые взаимно перпендикулярны.

в) Координаты направляющих векторов  $\vec{S}_1 = (1, 0, 1)$  и  $\vec{S}_2 = (2, -2, 1)$  прямых не пропорциональны, и скалярное произведение этих векторов не равно нулю, т. е. прямые не параллельны и не пер-



пендикулярны. Найдём угол между прямыми, который равен углу между их направляющими векторами:

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,  $\varphi = 45^\circ$ .

### 3.4. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть в пространстве заданы уравнениями прямая  $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$  и плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$ . **Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и её проекцией на плоскость.** Определяется угол по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Если прямая параллельна плоскости, то направляющий вектор  $\vec{S} = (l, m, n)$  прямой и нормальный вектор  $\vec{n} = (A, B, C)$  плоскости ортогональны. Следовательно, равенство нулю скалярного произведения этих векторов  $Al + Bm + Cn = 0$  является **условием параллельности прямой и плоскости.**

Если же прямая перпендикулярна плоскости, то векторы  $\vec{S} = (l, m, n)$  и  $\vec{n} = (A, B, C)$  коллинеарны и соотношение  $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$  является **условием перпендикулярности прямой и плоскости.**

Пример 16. Даны прямая и плоскость:

а)  $\frac{x-3}{6} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-2}{-2}$  и  $3x - 4y + z - 3 = 0$ ;

б)  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{1}$  и  $2x + y - 4z + 1 = 0$ ;

в)  $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+4}{2}$  и  $2x - 4y + 2z - 9 = 0$ .

Определить, какие из них параллельны или перпендикулярны.

Решение. а) Направляющим вектором прямой является вектор  $\vec{S} = (-6, 8, -2)$ , а нормальным вектором плоскости – вектор



$\vec{n} = (3, -4, 1)$ . Координаты векторов пропорциональны:  $\frac{3}{-6} = \frac{-4}{8} = \frac{1}{-2}$ .

Следовательно, прямая перпендикулярна плоскости.

б) Координаты направляющего вектора  $\vec{S} = (3, -2, 1)$  прямой и нормального вектора  $\vec{n} = (2, 1, -4)$  плоскости удовлетворяют условию параллельности прямой и плоскости:  $2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 = 0$ . Это означает, что прямая параллельна плоскости.

в) Координаты направляющего вектора  $\vec{S} = (-1, -1, 2)$  прямой и нормального вектора  $\vec{n} = (2, -4, 2)$  плоскости не удовлетворяют ни условию параллельности, ни условию перпендикулярности прямой и плоскости. Найдём угол между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|2 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-1) + 2 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, прямая и плоскость пересекаются под углом  $\varphi = 30^\circ$ .

Пример 17. Известно, что прямая  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{2}$  и плоскость  $x+2y-z-1=0$  пересекаются в точке  $P$ . Найти координаты этой точки.

Решение. Перейдём от канонических уравнений прямой к параметрическим:

$$\frac{x-2}{3} = t, \quad \frac{y+4}{2} = t, \quad \frac{z-5}{2} = t; \quad \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -4 + 2t, \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$$

Полученные выражения для  $x, y, z$  подставим в уравнение плоскости и найдём параметр  $t$ :  $2 + 3t + 2(-4 + 2t) - (5 + 2t) - 1 = 0$ ,  $5t - 12 = 0$ ,

$t = \frac{12}{5}$ . Найденный параметр  $t$  подставим в параметрические уравнения плоскости и найдём координаты точки пересечения прямой и плоскости:

$$x = 2 + 3 \cdot \frac{12}{5} = 9 \frac{1}{5}, \quad y = -4 + 2 \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5}, \quad z = 5 + 2 \cdot \frac{12}{5} = 9 \frac{4}{5}.$$

Таким образом, точка  $P(9 \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 9 \frac{4}{5})$  пересечения прямой и плоскости найдена.



### Задания для самостоятельной работы

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-2, 5)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (3, -4)$ .
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $B(2, -3)$  под углом  $45^\circ$  к оси  $Ox$ .
3. Найти угол между прямыми:
  - а)  $5x - y + 3 = 0$  и  $3x + 2y - 4 = 0$ ;
  - б)  $3x - 2y + 5 = 0$  и  $2x + 3y - 8 = 0$ .
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(2, -4)$  параллельно прямой  $3x - 2y + 5 = 0$ .
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $P(-3, 2)$  перпендикулярно прямой  $2x + 5y - 3 = 0$ .
6. Найти величины отрезков, отсекаемых на координатных осях прямыми: а)  $3x - 2y - 6 = 0$ ; б)  $4x + 5y - 20 = 0$ .
7. Вычислить площадь треугольника, образованного осями координат и прямой  $4x - 7y - 28 = 0$ .
8. Найти расстояние от точки  $A(-2, 4)$  до прямой  $3x + 4y - 20 = 0$ .
9. Найти длину перпендикуляра, проведённого из точки  $A(6, 2)$  к прямой  $4x + 3y - 10 = 0$ .
10. Найти точку  $B$ , симметричную точке  $A(4, 5)$  относительно прямой  $8x + 6y - 37 = 0$ .
11. Даны вершины треугольника  $A(-2, 7)$ ,  $B(10, -2)$ ,  $C(8, 12)$ . Найти уравнения сторон  $AB$  и  $BC$  и их угловые коэффициенты, уравнение высоты  $CD$  и её длину, уравнение медианы  $CM$ .
12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2, -4, 3)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (1, -3, 2)$ .
13. Даны точки  $A(2, -1, 3)$  и  $B(4, -5, -2)$ . Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно отрезку  $AB$ .
14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(3, -2, 1)$  перпендикулярно оси  $Oy$ .
15. Найти угол между плоскостями  $5x - y + 3z - 2 = 0$  и  $-x + 2y + 10z - 7 = 0$ .
16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(2, -4, 1)$  параллельно плоскости  $5x - 3y + 4z - 7 = 0$ .



17. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(2, -3, 1)$  параллельно плоскости  $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ .

18. Даны точки  $A(2, 3, -4)$ ,  $B(1, 0, 6)$ ,  $C(-3, -1, 5)$ . Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $A$  параллельно отрезку  $BC$ .

19. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(2, -4, 1)$  параллельно оси  $Oz$ .

20. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $A(2, 1, -4)$  параллельно прямой  $x = 2 - 3t$ ,  $y = -1 + t$ ,  $z = 5t$ .

21. Даны вершины треугольника  $A(1, 3, -2)$ ,  $B(4, 1, 0)$ ,  $C(3, -3, 2)$ . Составить уравнение медианы  $CM$ .

22. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+6}{7} = \frac{z+2}{8} \quad \text{и} \quad \frac{x+5}{-8} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+4}{7}.$$

23. Составить канонические уравнения прямой, заданной пересечением двух плоскостей  $\begin{cases} x+2y+z-8=0, \\ 2x+2y-3z+6=0. \end{cases}$

24. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(3, -4, 2)$  параллельно прямой  $\begin{cases} 7x+y+z-8=0, \\ 6x+y-2z-7=0. \end{cases}$

25. Вычислить угол между прямой  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{1}$  и плоскостью  $4x+2y-2z+5=0$ .

26. Найти координаты точки  $P$ , являющейся проекцией точки  $M(6, 1, 7)$  на плоскость  $2x - y + 3z - 4 = 0$ .

27. Найти координаты точки  $P$ , являющейся проекцией точки  $M(3, 2, 0)$  на прямую  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{-2}$ .

28. Найти точку  $N$ , симметричную точке  $M(3, -2, 5)$  относительно прямой  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+9}{1} = \frac{z+2}{3}$ .



## Лекция 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 4.1. Понятие функции

Пусть задано множество  $D = \{x\}$  изменения переменной величины  $x$ . Если каждому значению величины  $x \in D$  соответствует одно определённое значение величины  $y$ , то говорят, что на множестве  $D$  задана **функция**  $y = f(x)$ , т.е. величина  $y$  есть функция величины  $x$ .

Величина  $x$  называется **аргументом** функции  $y$ , множество  $D$  – **областью определения функции**.

Примечание. В дальнейшем под областью определения функции  $y = f(x)$  будем понимать множество всех тех значений  $x$ , для которых функция  $y = f(x)$  имеет смысл.

Так как значение величины  $x \in D$  можно брать произвольно, а значение величины  $y$  зависит от выбранного значения  $x$ , то  $x$  называется **независимой переменной**, а  $y$  – **зависимой переменной**. Множество значений, принимаемых функцией  $y$ , называется **областью значений функции**.

**Графиком функции** называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции.

Значение функции при  $x = x_0$  называется **частным значением функции** в точке  $x_0$  и обозначается  $f(x_0)$ .

Пример 1. Вычислить значение функции  $y = x^4 - 3x + 1$  при  $x = -1$ .

Решение. Частное значение данной функции в точке  $x = -1$  равно  $y = (-1)^4 - 3 \cdot (-1) + 1 = 5$ .

Пример 2. Вычислить значение функции

$$y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x < 0, \\ 5x^2 + 3, & \text{если } 0 \leq x < 3, \text{ при а) } x = -3; \text{ б) } x = 2; \text{ в) } x = 4. \\ 1, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$$

Решение. а) Так как  $x = -3 < 0$ , то  $y = 2x - 1$ . Поэтому частное значение функции равно  $y = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$ .



б)  $x = 2 \in [0, 3)$ . Поэтому  $y = 5x^2 + 3$ , и частное значение функции равно  $y = 5 \cdot 2^2 + 3 = 23$ .

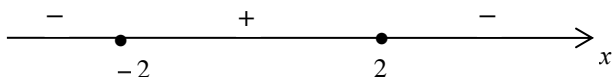
в) В данном случае  $x = 4 > 3$ . Следовательно,  $y = 1$ .

Пример 3. Найти область определения функции  $y = \frac{5}{1-x}$ .

Решение. Так как  $1-x \neq 0$ , т. е.  $x \neq 1$ , то  $D(y) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Пример 4. Найти область определения функции  $y = \sqrt{4-x^2}$ .

Решение. Выражение под знаком корня квадратного должно быть неотрицательным, т. е.  $4-x^2 \geq 0$ . Решим это неравенство методом интервалов:  $(2-x)(2+x) \geq 0$ .



Таким образом,  $D(y) = [-2, 2]$ .

Пример 5. Найти область определения функции  $y = \frac{\sqrt{6-x}}{x-2}$ .

Решение. Для данной функции  $\begin{cases} 6-x \geq 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$  т. е.  $x \leq 6$  и  $x \neq 2$ . По-

этому  $D(y) = (-\infty, 2) \cup (2, 6]$ .

Пусть функция  $y = f(u)$  определена на множестве  $U = \{u\}$ , а функция  $u = \varphi(x)$  – на множестве  $X = \{x\}$ , причём все значения функции  $u \in U$ . Тогда переменная  $y$  является функцией от  $x$ :  $y = f(\varphi(x))$ . В этом случае  $y$  называется **сложной функцией**, а переменная  $u$  – **промежуточным аргументом**. Например,  $y = \sin u$  и  $u = 3x - 4$ . Тогда  $y = \sin(3x - 4)$  является сложной функцией.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $D = \{x\}$  и пусть  $G = \{y\}$  – область значений функции. Это означает, что каждому значению  $x \in D$  ставится в соответствие единственное значение  $y \in G$ . Если же каждому значению  $y \in G$  соответствует только одно значение  $x \in D$ , то на множестве  $G$  можно определить функцию  $x = \varphi(y)$ , ко-



торая называется **обратной** по отношению к функции  $y = f(x)$ . В этом случае функции  $y = f(x)$  и  $x = \varphi(y)$  являются **взаимобратными**. Например, функции  $y = 3^x$  и  $x = \log_3 y$  являются взаимобратными. Пусть дана функция  $y = 3x - 4$ . Тогда функция  $x = \frac{y+4}{3}$  будет обратной для данной, т. е. эти функции являются взаимобратными.

При исследовании функций и построении графиков независимую переменную обратной функции удобно обозначать через  $x$ , а зависимую переменную – через  $y$ . Тогда взаимобратными являются функции  $y = 3^x$  и  $y = \log_3 x$ ,  $y = 3x - 4$  и  $y = \frac{x+4}{3}$ . Графики взаимобратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т.е. относительно прямой  $y = x$ .

Если независимая переменная  $x$  и функция  $y$  связаны соотношением  $F(x, y) = 0$ , которое не разрешено относительно  $y$ , то  $y$  называется  **неявной функцией**  от  $x$ , например:  $x^2 + y^2 - 9 = 0$ ,  $3x - 4y + 5y^3 = 0$ ,  $2x - 4y + 5 = 0$ .

## 4.2. Предел функции в точке

Число  $A$  называется **пределом функции**  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для всех значений  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа  $A$ . Записывается это следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ или } f(x) = A \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

В определении предела  $x_0$  может быть любым конечным числом или же одним из символов  $-\infty$  или  $+\infty$ .

При вычислении пределов пользуются следующими правилами:

1) предел постоянной величины равен самой величине, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C ;$$

2) предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций при условии, что преде-



лы существуют, т. е. для двух функций справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

3) предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов при условии, что эти пределы существуют, т. е. для двух функций справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

4) если  $n$  – натуральное число, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n;$$

5) постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

6) предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел знаменателя отличен от нуля,

$$\text{т. е. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

При вычислении пределов функции иногда приходится пользоваться понятием односторонних пределов. Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $D = \{x\}$  и пусть  $x \rightarrow x_0$ . Будем рассматривать такие значения  $x$ , при которых  $x < x_0$ . Это означает, что  $x \rightarrow x_0$ , оставаясь всё время слева от  $x_0$ . Если при этом существует предел функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то он называется **левым пределом** этой функции в точке  $x_0$  или при  $x \rightarrow x_0$  и обозначается

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0).$$

Пусть теперь  $x \rightarrow x_0$ , оставаясь всё время справа от  $x_0$ , т. е. оставаясь больше  $x_0$ . Если при этом существует предел функции  $y = f(x)$ , то он называется **правым пределом** этой функции в точке  $x_0$  или при  $x \rightarrow x_0$  и обозначается

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$



Левый и правый пределы называются **односторонними пределами функции** в точке. Если односторонние пределы функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  существуют и равны между собой, то функция имеет тот же предел в этой точке: 
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Если односторонние пределы функции в точке  $x_0$  существуют, но не равны между собой, то предел функции в этой точке не существует.

Пример 6. Найти предел функции  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x \leq 2, \\ 2x-1, & \text{если } x > 2 \end{cases}$  в точке  $x = 2$ .

Решение. Найдём односторонние пределы функции в точке  $x = 2$ . Если  $x \leq 2$ , то  $f(x) = 2 - x$  и  $f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (2-x) = 2 - 2 = 0$ . Если же  $x > 2$ , то  $f(x) = 2x - 1$  и  $f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (2x-1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ . Так как односторонние пределы не равны между собой, т. е.  $0 \neq 3$ , то предел данной функции в точке  $x = 2$  не существует.

Пример 7. Найти предел функции  $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{если } x \leq 6, \\ x^2-27, & \text{если } x > 6 \end{cases}$  в точке  $x = 6$ .

Решение. Найдём односторонние пределы функции в данной точке. Если  $x \leq 6$ , то  $f(x) = 2x - 3$  и  $f(6-0) = \lim_{x \rightarrow 6-0} (2x-3) = 2 \cdot 6 - 3 = 9$ . Если  $x > 6$ , то  $f(x) = x^2 - 27$  и  $f(6+0) = \lim_{x \rightarrow 6+0} (6^2 - 27) = 36 - 27 = 9$ . Так как односторонние пределы в точке  $x = 6$  равны между собой, то предел функции в этой точке существует и равен 9.

### 4.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой** при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ . Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:



1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая;

2) произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая;

3) произведение ограниченной величины на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

Рассмотрим бесконечно малые функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ . Так как эти бесконечно малые функции

могут стремиться к нулю при  $x \rightarrow x_0$  с разными скоростями, то для их сравнения находится предел отношения этих функций  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ . При

этом возможны следующие случаи:

1) если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$  ( $A$  – конечное число), то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  назы-

ваются бесконечно малыми функциями одного порядка;

2) если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются эквивалентными

бесконечно малыми функциями при  $x \rightarrow x_0$ ; в этом случае предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них или какую-либо одну заменить им эквивалентными;

3) если предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  не существует, то бесконечно малые

функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются несравнимыми.

Функция  $y = f(x)$  называется **бесконечно большой функцией** в точке  $x_0$ , если для всех значений  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , соответствующие значения функции по абсолютной величине превосходят любое наперёд заданное сколь угодно большое положительное число, т. е.  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

Пусть  $f(x)$  есть бесконечно большая функция при  $x \rightarrow x_0$ , тогда функция  $\frac{1}{f(x)}$  является бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow x_0$ . Ес-



ли  $\alpha(x)$  есть бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\frac{1}{\alpha(x)}$  является бесконечно большой функцией при  $x \rightarrow x_0$ .

Например, функция  $\alpha(x) = x^2$  при  $x \rightarrow 0$  является бесконечно малой функцией. Тогда функция  $\frac{1}{x^2}$  при  $x \rightarrow 0$  является бесконечно большой. Функция  $f(x) = x^4 + 1$  при  $x \rightarrow \infty$  является бесконечно большой. Тогда  $\frac{1}{x^4 + 1}$  при  $x \rightarrow \infty$  будет бесконечно малой функцией.

Предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  отношения бесконечно малых функций может быть конечным, бесконечным или же вообще не существует. В этом случае выражение  $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  при  $x \rightarrow x_0$  называется **неопределённостью вида**  $\frac{0}{0}$ .

Пусть  $f(x) \rightarrow \infty$  и  $g(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ , т. е.  $f(x)$  и  $g(x)$  являются бесконечно большими функциями в точке  $x_0$ . Предел отношения этих функций может быть конечным, бесконечным или вообще не существует. Выражение  $\frac{f(x)}{g(x)}$  при  $x \rightarrow x_0$  называется **неопределённостью вида**  $\frac{\infty}{\infty}$ , а выражение  $f(x) - g(x)$  называется **неопределённостью вида**  $\infty - \infty$ .

Если  $\alpha(x)$  – бесконечно малая функция, а  $f(x)$  – бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ , то выражение  $\alpha(x) \cdot f(x)$  называется **неопределённостью вида**  $0 \cdot \infty$ . Аналогично вводятся **неопределённости вида**  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ . Чтобы раскрыть неопределённость, нужно найти соответствующий предел.

Пример 8. Найти предел функции  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$  при  $x \rightarrow 4$ .



Решение. Подставим предельное значение  $x = 4$  в функцию:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \left( \frac{4^2 - 6 \cdot 4 + 8}{4 - 4} + 8 = \frac{0}{0} \right). \text{ Получена неопределённость}$$

вида  $\frac{0}{0}$ . Для её раскрытия найдём корни квадратного трёхчлена, запи-

санного в числителе, и разложим его на множители:  $x^2 - 6x + 8 = 0$ ,  
 $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ . Подставим разложение в

числитель:  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 2) = 4 - 2 = 2$ .

Пример 9. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ .

Решение. Подставим предельное значение  $x = 1$  в функцию:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \left( \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 2}{1^2 + 2 \cdot 1 - 3} = \frac{0}{0} \right). \text{ Для раскрытия неопределённо-}$$

сти разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2);$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -3, \quad x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1).$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 3)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{1 - 2}{1 + 3} = -\frac{1}{4}.$$

Пример 10. Найти предел функции  $f(x) = \frac{\sqrt{2x - 9} - 1}{x - 5}$  при  $x = 5$ .

Решение. Подставим вначале значение  $x = 5$  в функцию:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x - 9} - 1}{x - 5} = \left( \frac{\sqrt{25 - 9} - 1}{5 - 5} = \frac{0}{0} \right). \text{ Для раскрытия полученной не-}$$

определённости числитель и знаменатель функции умножим на выра-  
жение  $\sqrt{2x - 9} + 1$ , сопряжённое числителю, и выполним необходимые  
преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{2x - 9} - 1)(\sqrt{2x - 9} + 1)}{(x - 5)(\sqrt{2x - 9} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{2x - 9})^2 - 1^2}{(x - 5)(\sqrt{2x - 9} + 1)} =$$



$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-9-1}{(x-5)(\sqrt{2x-9}+1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-9}+1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \\ &\frac{2}{\sqrt{2x-9}+1} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 5-9}+1} = 1. \end{aligned}$$

Пример 11. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$ .

Решение. При подстановке в функцию предельного значения  $x = 0$

получим:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x} = \left( \frac{\sqrt{2-0}-\sqrt{2+0}}{0} = \frac{0}{0} \right)$ . Умножим чис-

литель и знаменатель функции на выражение  $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$  и выполним необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}{x(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2-x})^2 - (\sqrt{2+x})^2}{x(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-x-(2+x)}{x(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}} = \frac{-2}{\sqrt{2-0}+\sqrt{2+0}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Пример 12. Найти предел функции  $f(x) = \frac{6x^2+x+1}{-2x^2+3x-1}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Решение. Подставим в функцию вместо переменной  $x$  её предельное значение:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+x+1}{-2x^2+3x-1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ . Получена неопределённость

вида  $\frac{\infty}{\infty}$ . Для её раскрытия числитель и знаменатель разделим почленно на  $x^2$  и вычислим предел:



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{6}{-2} = -3, \text{ так как функ-}$$

ции  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{3}{x}$  являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow \infty$ .

Предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  называется *первым замечательным пределом*. Пусть  $\alpha(x)$  есть бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  или  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  называется *вторым замечательным пределом*.

*замечательным пределом*.

Пример 13. Найти предел функции  $f(x) = \frac{\sin 4x}{3x}$  при  $x \rightarrow 0$ .

Решение.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \left( \frac{\sin(4 \cdot 0)}{3 \cdot 0} = \frac{0}{0} \right)$ . Для раскрытия неопре-

лённости  $\frac{0}{0}$  воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sin 4x}{4 \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sin 4x}{3 \cdot 4x} = \frac{4}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

Пример 14. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$ .

Решение. Воспользуемся формулой второго замечательного предела  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \right)^3 = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \right)^3 = e^3.$$



Пример 15. Найти предел функции  $f(x) = \left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$  при  $x \rightarrow 0$ .

Решение. Воспользуемся вторым замечательным пределом в виде формулы  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти частные значения функции:

а)  $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x + 3}$ , найти  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$ ;

б)  $f(x) = 3^{x+1}$ , найти  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(2)$ ;

в)  $f(x) = \cos 2x - \sin x$ , найти  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-\pi)$ ;

г)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & \text{если } x < -1, \\ 2, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ 3x + 1, & \text{если } x \geq 1, \end{cases}$  найти  $f(-2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(3)$ ;

д)  $f(x) = \begin{cases} 3 \sin 2x, & \text{если } x < 0, \\ \cos x - 1, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$  найти  $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $f(0)$ ,  $f(\pi)$ ;

е)  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x^2}, & \text{если } x < 0, \\ 2x^3, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$  найти  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

2. Найти области определения функций:



$$\text{а) } f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \frac{3x}{x-1};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{2x^2 - x}{x-1} + \frac{3}{\log_2(x+4)};$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2 - 8x + 15} - \frac{\sin^2 x}{|x-4| - 2};$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{\sqrt[4]{25 - x^2}}{\sqrt[3]{2x - x^2}} + \log_3(x+4).$$

3. Найти пределы функций:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 6x + 8}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 9};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2}; \text{ д) } \lim_{x \leftarrow -\infty} \frac{3 - 2x - x^2}{x^2 + 4x - 2}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x}{2 - 4x^2 + 3x^3};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x - 3x^2}{x^2 - 4x + 1}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{1 - 4x} - 3}; \text{ и) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x^2 - 9};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3}; \text{ л) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} x}; \text{ м) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \text{ н) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$\text{п) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}; \text{ р) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+4}\right)^{1-2x}; \text{ с) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{2-3x}.$$

## Лекция 5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 5.1. Производная функции

**Производной функции**  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Другими обозначениями производной могут быть  $\frac{dy}{dx}$ ,  $f'(x)$ ,  $f'_x$ .



Из определения производной следует, что **производная функции в некоторой точке есть скорость её изменения** в этой точке.

Нахождение производной функции  $y = f(x)$  называется **дифференцированием** этой функции.

**Касательной** к графику функции  $y = f(x)$ , в точке  $M$  называется предельное положение секущей  $MN$ , когда точка  $N$ , двигаясь по графику функции  $y = f(x)$ , стремится занять положение точки  $M$ .

**Геометрический смысл производной** функции  $y = f(x)$  состоит в том, что производная  $f'(x)$  в точке  $x$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени  $t$  есть производная от функции пути  $S(t)$  по времени  $t$ . В этом состоит **механический смысл производной**.

**Экономический смысл производной** состоит в том, что производная от функции  $u(t)$ , выражающей количество произведённой продукции в момент времени  $t$ , равна производительности труда в этот момент времени.

На практике производные функций находят с помощью формул и правил. Основные формулы дифференцирования приведены ниже.

1	$C' = 0$	2	$(x^n)' = nx^{n-1}$
3	$(e^x)' = e^x$	4	$(a^x)' = a^x \ln a$
5	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	6	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	8	$(\cos x)' = -\sin x$
9	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	10	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  дифференцируемы в некотором интервале  $(a, b)$ . Справедливы следующие правила:



1) производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;

2) производная произведения двух функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй:  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ;

3) постоянный множитель можно выносить за знак производной:  $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ ;

4) производная частного двух функций, если знаменатель не равен нулю, равна дроби, знаменатель которой есть квадрат прежнего знаменателя, а числитель – произведение производной числителя на знаменатель минус произведение числителя на производную знаменателя:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Пример 1. Найти производные функций:

а)  $y = 3x^2 - x + \frac{4}{x} - \frac{2}{3x^2}$ ; б)  $y = 5\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ ;

в)  $y = (2x^2 - 3)\sin x$ ; г)  $y = \frac{3x^2 - 4}{2x + 1}$ .

Решение. а)  $y' = \left(3x^2 - x + \frac{4}{x} - \frac{2}{3x^2}\right)' = (3x^2)' - x' + (4x^{-1})' -$

$$-\left(\frac{2}{3}x^{-2}\right)' = 3(x^2)' - x' + 4(x^{-1})' - \frac{2}{3}(x^{-2})' = 3 \cdot 2x - 1 + 4 \cdot (-1)x^{-2} -$$

$$-\frac{2}{3} \cdot (-2)x^{-3} = 6x - 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{3x^3};$$

б)  $y' = \left(5\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(5x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 5 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} -$

$$-3 \cdot \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}};$$

в)  $y' = (2x^2 - 3)' \sin x + (2x^2 - 3)(\sin x)' = 4x \cdot \sin x + (2x^2 - 3)\cos x$ ;



$$\begin{aligned} \text{г) } y' &= \frac{(3x^2 - 4)'(2x+1) - (3x^2 - 4)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{6x(2x+1) - (3x^2 - 4) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \\ &= \frac{12x^2 + 6x - 6x^2 + 8}{(2x+1)^2} = \frac{6x^2 + 6x + 8}{(2x+1)^2} = \frac{2(3x^2 + 3x + 4)}{(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить производную функции

$$y = 2x^2 - \frac{1}{3x^5} + 5\sqrt[3]{x^2} \quad \text{при } x = -1.$$

Решение. Найдём производную:  $y' = \left(2x^2 - \frac{1}{3x^5} + 5\sqrt[3]{x^2}\right)' =$

$$= \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^{-5} + 5x^{\frac{2}{3}}\right)' = 2 \cdot 2x - \frac{1}{3} \cdot (-5)x^{-6} + 5 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 4x + \frac{5}{3x^6} + \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Тогда  $y'(-1) = 4 \cdot (-1) + \frac{5}{3 \cdot (-1)^6} + \frac{10}{3\sqrt[3]{-1}} = -4 + \frac{5}{3} - \frac{10}{3} = -5\frac{2}{3}.$

Пример 3. Вычислить производную функции  $y = \frac{x^2 - 3}{4x - 1}$  при  $x = -2$ .

Решение. Найдём производную функции:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 - 3)'(4x - 1) - (x^2 - 3)(4x - 1)'}{(4x - 1)^2} = \frac{2x(4x - 1) - (x^2 - 3) \cdot 4}{(4x - 1)^2} = \\ &= \frac{8x^2 - 2x - 4x^2 + 12}{(4x - 1)^2} = \frac{4x^2 - 2x + 12}{(4x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Вычислим значение производной при  $x = -2$ :

$$y' = \frac{4 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 12}{(4 \cdot (-2) - 1)^2} = \frac{16 + 4 + 12}{81} = \frac{32}{81}.$$

Пример 4. Среди функций а)  $y = 3x^2 - 4$ ; б)  $y = 6x + 5$ ;

в)  $y = 6x^2 - x$  найти такую, производная которой равна 6х.

Решение. Найдём производные: а)  $y' = (3x^2 - 4)' = 6x$ ;

б)  $y' = (6x + 5)' = 6$ ; в)  $y' = (6x^2 - x)' = 12x - 1$ . Следовательно, искомой будет функция  $y = 3x^2 - 4$ .



Пусть функция  $u = \varphi(x)$  имеет в некоторой точке  $x$  производную  $u' = \varphi'(x)$ , а функция  $y = f(u)$  имеет в соответствующей точке  $u = \varphi(x)$  производную  $y'_u = f'(u)$ . Тогда функция  $y = f(\varphi(x))$  является сложной и её производная находится по следующему правилу: производная сложной функции по основному аргументу равна произведению производной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по основному аргументу, т. е.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Это правило распространяется на сложные функции, которые имеют любое конечное число промежуточных аргументов.

Пример 5. Найти производные функций: а)  $y = e^{-3x^2}$ ;

б)  $y = \sin^3 x$ ; в)  $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$ .

Решение. а) Введём промежуточный аргумент  $u = -3x^2$ . Тогда  $y = e^u$ ,  $u'_x = -6x$ ,  $y'_u = e^u$ ,  $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u (-6x) = -6xe^{-3x^2}$ .

б) Функцию можно записать в виде  $y = (\sin x)^3$ . Введём промежуточный аргумент  $u = \sin x$ , тогда  $y = u^3$ . По формулам для производной сложной функции имеем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (u^3)'_u \cdot (\sin x)'_x = 3u^2 \cos x = 3 \sin^2 x \cos x.$$

в) Запишем функцию в виде  $y = (1 - \cos 2x)^{\frac{1}{2}}$ . Введём промежуточные аргументы  $v = 2x$  и  $u = 1 - \cos v$ . Тогда  $y = u^{\frac{1}{2}}$ . Так как имеем два

промежуточных аргумента, то  $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'_u \cdot (1 - \cos v)'_v \times$

$$\times (2x)'_x = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin v \cdot 2 = \sin 2x \cdot (1 - \cos 2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}. \quad \text{Таким}$$

образом,  $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$ .



## 5.2. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой

Если к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$  проведена касательная, то точка  $M_0$  называется **точкой касания**. Исходя из геометрического смысла производной, угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, т. е.  $k = f'(x_0)$ . Тогда уравнение  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$  является **уравнением касательной к графику функции**  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .

Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания, называется **нормалью** к кривой. Так как угловые коэффициенты касательной и нормали обратны по величине и противоположны по знаку, то уравнение

$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$  является **уравнением**

**нормали к графику функции**  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .

Пример 6. Написать уравнения касательной и нормали к параболе  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$  в точке с абсциссой  $x_0 = 4$ .

Решение. Подставим  $x_0 = 4$  в уравнение параболы и найдём  $y_0 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 3$ . Следовательно,  $M_0(4, 3)$  есть точка касания.

Производная функции  $y' = x - 2$ . Вычислим значение производной при  $x_0 = 4$ :  $f'(4) = 4 - 2 = 2$ . Тогда уравнение  $y - 3 = 2(x - 4)$  или  $2x - y - 5 = 0$  является уравнением касательной. Уравнение нормали будет иметь вид  $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4)$  или  $x + 2y - 10 = 0$ .

## 5.3. Производные высших порядков. Правило Лопиталья

Пусть функция  $y = f(x)$  в области  $D$  имеет конечную производную  $y' = f'(x)$ , которая в свою очередь также является функцией от переменной  $x$  в этой же области. Производная  $y'$  называется **производной первого порядка**. Если существует производная от производной первого порядка, то она называется **производной второго поряд-**



*ка*, или **второй производной** от функции  $y = f(x)$  и обозначается  $y'$ , или  $f''(x)$ . Производная от производной второго порядка называется **производной третьего порядка**, или **третьей производной**, и обозначается  $y''$ , или  $f'''(x)$  и т. д. Производные, начиная со второго порядка и выше, называются **производными высших порядков**.

Пример 7. Найти производную четвёртого порядка функции  $y = x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ .

Решение.  $y' = 3x^2 + 10x - 4$ ;  $y'' = 6x + 10$ ;  $y''' = 6$ ;  $y^{(4)} = 0$ .

Пример 8. Вычислить значение производной третьего порядка функции  $y = \sin 3x$  при  $x = \frac{\pi}{3}$ .

Решение. Найдём производную третьего порядка:

$$y' = \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x; \quad y'' = 3 \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -9 \sin 3x;$$

$$y''' = -9 \cos 3x \cdot 3 = -27 \cos 3x. \quad \text{Тогда } y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -27 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \\ = -27 \cos \pi = -27 \cdot (-1) = 27.$$

При вычислении предела отношения двух функций  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  в точке

$x_0$  может оказаться, что при  $x \rightarrow x_0$  числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, т. е. одновременно являются или бесконечно малыми, или бесконечно большими функциями. Вычисление предела в этом случае называется **раскрытием неопределённости** и может выполняться по правилу **Лопиталья**, суть которого заключается в следующем.

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при  $x \rightarrow x_0$  и  $\varphi'(x) \neq 0$  в окрестности точки  $x_0$ . Если

существует предел отношения производных  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ , то справедливо

равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ . Это означает, что в случае неопре-

делённостей вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$  **вычисление предела отношения функций**



можно заменить вычислением предела отношения их производных, что может оказаться более простым.

Если же и отношение производных приводит к одной из неопределённостей  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ , то и к этому отношению можно применить правило Лопиталья, т. е. исследовать предел отношения производных второго порядка и т. д.

Пример 9. Найти пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ .

Решение. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} =$

$$= \left( \frac{(-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 8}{(-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 16 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 15} = \frac{0}{0} \right) = \{ \text{найдем предел от-}$$

ношения производных} =  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 5x^2 + 2x + 8)'}{(x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15)'}$  =

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 10x + 2}{4x^3 - 6x^2 - 32x + 2} = \frac{3 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) + 2}{4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 32 \cdot (-1) + 2} = \frac{5}{8}.$$

б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left( \frac{\ln(+\infty)}{+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \right) = \{ \text{применим правило Лопиталья} \} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty$ . Тогда нахождение предела

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x))$  приводит к неопределённости вида  $\infty - \infty$ . В этом

случае разность  $f(x) - \varphi(x)$  можно представить в виде



$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)f(x)}} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)f(x)}}.$$

В результате получаем неопределённость вида  $\frac{0}{0}$ , которую можно раскрыть с помощью правила Лопиталья.

Пример 10. Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ .

Решение. При  $x \rightarrow 1$  функции  $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$  и  $\varphi(x) = \frac{1}{x - 1}$  являются бесконечно большими одного и того же знака. Поэтому их разность приводит к неопределённости вида  $\infty - \infty$ . Преобразуем выражение под знаком предела:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - 1}{x^2 - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x^2 - 1} = \left( \frac{1 - 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} \right) = \{ \text{применим правило Лопиталья} \} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ . Тогда при вычислении предела  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x))$  приходим к неопределённости вида  $0 \cdot \infty$ . Выражение  $f(x) \cdot \varphi(x)$  преобразуется к виду  $\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$  или  $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ , что приводит к

неопределённостям  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ , которые можно раскрывать с помощью правила Лопиталья.



## 5.4. Экстремум функции

При исследовании функции приходится определять характер её поведения. Для этого можно использовать средства дифференциального исчисления.

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в интервале  $(a, b)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если производная  $f'(x)$  в интервале  $(a, b)$  положительна, то функция  $y = f(x)$  в этом интервале возрастает;

2) если производная  $f'(x)$  в интервале  $(a, b)$  отрицательна, то функция  $y = f(x)$  в этом интервале убывает.

Эти утверждения являются **достаточными условиями возрастания и убывания (монотонности) функции**.

Пример 11. Исследовать функцию  $y = x^3 - 3x - 4$  на монотонность.

Решение. Функция определена на всём множестве действительных чисел, т. е.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ . Найдём производную:  $y' = 3x^2 - 3$ . Функция возрастает, если  $3x^2 - 3 > 0$ , т. е.  $x^2 - 1 > 0$  или же  $(x-1)(x+1) > 0$ . Решив это неравенство, получим, что функция возрастает при  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . Функция убывает, если  $3x^2 - 3 < 0$ , т. е.  $x^2 - 1 < 0$  или  $(x-1)(x+1) < 0$ . Решив последнее неравенство, получим, что при  $x \in (-1, 1)$  функция убывает. Таким образом, интервалами монотонности функции являются  $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$ .

Особую роль в исследовании функции играют такие значения  $x$ , которые отделяют интервалы возрастания и убывания функции. В этих точках функция меняет характер своего поведения.

Функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  **максимум**, если  $f(x_0)$  есть наибольшее значение этой функции в некоторой окрестности данной точки. Функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  **минимум**, если  $f(x_0)$  есть



наименьшее значение этой функции в некоторой окрестности данной точки.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а максимум и минимум называются *экстремумами функции*.

Если в точке  $x_0$  функция  $y = f(x)$  достигает экстремума, то её производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует. Это утверждение является *необходимым признаком (условием) экстремума*.

Следует иметь в виду, что необходимый признак экстремума не является достаточным. Это означает, что если в какой-то точке производная функции равна нулю, то эта точка не обязательно будет точкой экстремума.

Точки, в которых производная функции равна нулю либо не существует, называются *критическими (стационарными)*.

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$  и всюду в этой окрестности имеет производную, а в точке  $x_0$  производная либо равна нулю, либо не существует. Тогда имеет место *первый достаточный признак (первое достаточное условие) экстремума*:

1) если при переходе через точку  $x_0$  слева направо производная функции меняет знак с «+» на «-», то в точке  $x_0$  функция имеет максимум;

2) если при переходе через точку  $x_0$  слева направо производная функции меняет знак с «-» на «+», то в точке  $x_0$  функция имеет минимум;

3) если при переходе через точку  $x_0$  производная функции не меняет знак, то в точке  $x_0$  функция экстремума не имеет.

При исследовании функции на экстремум имеет смысл придерживаться следующей схемы:

- 1) найти область определения функции;
- 2) найти производную функции и приравнять её к нулю;



3) решить полученное уравнение  $f'(x) = 0$  и найти критические точки;

4) в области определения функции найти те точки, в которых производная  $f'(x)$  либо равна нулю, либо не существует;

5) все полученные точки расположить в порядке возрастания и разбить область определения этими точками на частичные интервалы, в каждом из которых производная сохраняет знак. Таким образом, частичные интервалы являются интервалами монотонности функции;

6) найти знак производной в каждом из частичных интервалов и по знаку производной определить характер изменения функции в каждом из этих интервалов: возрастает или убывает;

7) по изменению знака производной при переходе через границы интервалов монотонности определить точки экстремума;

8) вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 12. Найти экстремум функции  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ .

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, т. е.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ . Найдём производную, приравняем её к нулю и решим полученное уравнение:  $y' = x^2 - 4x$ ,  $x^2 - 4x = 0$ ,  $x(x - 4) = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$ . Точки  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 4$  являются критическими. Разобьём область определения функции критическими точками на частичные интервалы, которые являются интервалами монотонности функции, и по знаку производной определим характер изменения функции в каждом из этих интервалов:

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$y$	Возрастает	1 max	Убывает	$-\frac{9}{3}$ min	Возрастает
$y'$	+	0	-	0	+



$$y'(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0; \quad y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0;$$

$y'(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 = 4 > 0$ . По первому достаточному признаку экстремума в точке  $x = 0$  функция имеет максимум, а в точке  $x = 4$  – минимум. При этом:

$$y_{\max} = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1, \quad y_{\min} = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 1 = -9 \frac{2}{3}.$$

Таким образом,  $y = 1$  и  $y = -9 \frac{2}{3}$  являются экстремумами функции.

При исследовании функции на экстремум иногда более удобно использовать производную второго порядка. Пусть  $x_0$  – критическая точка функции  $y = f(x)$ , т. е.  $f'(x) = 0$ , и в этой точке существует производная второго порядка  $f''(x_0)$ . Тогда имеет место **второй достаточный признак (второе достаточное условие) экстремума**:

- 1) если  $f''(x_0) > 0$ , то в точке  $x_0$  функция имеет минимум;
- 2) если  $f''(x_0) < 0$ , то в точке  $x_0$  функция имеет максимум;
- 3) если  $f''(x_0) = 0$ , то для исследования функции на экстремум нужно применять первый достаточный признак.

**Пример 13.** Исследовать функцию  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$  на экстремум.

**Решение.** Функция определена на всей числовой прямой, т. е.  $D(y) = (-\infty, +\infty)$ . Найдём производную  $y' = 3x^2 - 6x - 9$  и критические точки функции:  $3x^2 - 6x - 9 = 0$ ,  $x^2 - 2x - 3 = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ . Найдём производную второго порядка  $y'' = 6x - 6$  и вычислим её значение в критических точках:  $y''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0$  и  $y''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0$ . Таким образом, в точке  $x = -1$  функция имеет максимум, а в точке  $x = 3$  – минимум.



При этом  $y_{\max} = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$ , а  $y_{\min} = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 2 = -25$ .

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то на этом отрезке она достигает своего наименьшего и наибольшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренних точках отрезка, либо на его концах.

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции следует:

- 1) найти критические точки функции на отрезке  $[a, b]$ ;
- 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка;
- 3) среди вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y = -3x^4 + 8x^3 + 18x^2$  на отрезке  $[0, 4]$ .

Решение. Найдём производную  $y' = -12x^3 + 24x^2 + 36x$ , приравняем её к нулю и найдём критические точки:  $-12x^3 + 24x^2 + 36x = 0$ ,  $-12x(x^2 - 2x - 3) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 3$ . Из найденных точек  $x = -1$  не принадлежит отрезку  $[0, 4]$ . Вычислим значения функции в точках  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $x = 4$ :  $y(0) = 0$ ,  $y(3) = -3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 = 135$ ,  $y(4) = -3 \cdot 4^4 + 8 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 = 32$ . Следовательно, наименьшее значение функции равно 0, а наибольшее – 135.

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти производные функций:

а)  $y = 3x^2 - 4x + 5$ ; б)  $y = 5x - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}$ ; в)  $y = 2x^3 - \frac{5}{x^2} - \sqrt[3]{x^2}$ ;

г)  $y = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{5}{\cos^2 x}$ ; д)  $y = x^2 \cdot \operatorname{ctg} x$ ;



е)  $y = (x^2 + 2x - 5) \cdot \sin x$ ; ж)  $y = \frac{e^x}{x-1}$ ; з)  $y = \frac{3x+1}{2-3x}$ ;

и)  $y = \sqrt[3]{3-4x}$ ; к)  $y = e^{5x^2-4}$ ; л)  $y = \sin^2(2x-1)$ .

2. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции в заданной точке:

а)  $y = 3x^2 - 4x + 5$ ,  $x_0 = 1$ ; б)  $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ ,  $x_0 = -1$ .

3. Вычислить пределы по правилу Лопитала:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x} - 2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x - 1}$ .

4. Найти интервалы монотонности функций:

а)  $f(x) = 3x^2 - 10x + 8$ ; б)  $f(x) = x^3 - 3x = 1$ .

5. Исследовать функции на экстремум:

а)  $y = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$ ; б)  $y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x - 1$ .

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на заданном отрезке:

а)  $y = x^3 - 3x^2 + 3$ ,  $[1, 3]$ ; б)  $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5$ ,  $[0, 3]$ .

## Лекция 6. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 6.1. Понятие функции двух переменных. Частные производные

Будем рассматривать две независимые переменные  $x$  и  $y$ . Каждой паре значений  $x$  и  $y$  на плоскости соответствует точка, для которой  $x$  и  $y$  являются координатами. Возьмём на плоскости множество точек и обозначим его  $D = \{x, y\}$ .

Величина  $z$  называется **функцией** переменных величин  $x$  и  $y$  на множестве  $D$ , если каждой точке этого множества соответствует одно определённое значение величины  $z$ . Обозначается функция  $z = f(x, y)$ .

Множество  $D$  называется **областью определения функции**.

**Графиком функции двух независимых переменных** является некоторая **поверхность в пространстве**.

Рассмотрим функцию  $z = f(x, y)$ . Положим  $z = C$ , где  $C$  – постоянная величина. Тогда уравнение  $C = f(x, y)$  даёт зависимость между



переменными  $x$  и  $y$ , при которой заданная функция  $z$  сохраняет заданное значение  $C$ . Геометрически это означает, что поверхность  $z = f(x, y)$  пересекается плоскостью  $z = C$ , параллельной плоскости  $xOy$ . В результате такого пересечения полученная линия проектируется на плоскость  $xOy$  и задаётся уравнением  $C = f(x, y)$ . При перемещении точки с координатами  $(x, y)$  вдоль этой линии функция сохраняет постоянное значение, равное  $C$ .

Линия на плоскости  $xOy$ , в каждой точке которой функция  $z = f(x, y)$  сохраняет постоянное значение, называется **линией уровня** этой функции.

Пример 1. Найти линии уровня функции  $z = x^2 + y^2$ .

Решение. Поверхность, определяемая функцией  $z = x^2 + y^2$ , является параболоидом вращения. Линиями уровня являются concentric окружности  $x^2 + y^2 = C$ .

Предположим, что функция  $z = f(x, y)$  определена в окрестности точки  $P_0(x_0, y_0)$ . Дадим независимой переменной  $x$  приращение  $\Delta x$ . При этом переменная  $y$  будет сохранять своё значение. Тогда функция  $z = f(x, y)$  получит приращение  $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$  по переменной  $x$  в точке  $(x_0, y_0)$ . Это приращение называется **частным приращением функции по переменной  $x$**  в точке  $(x_0, y_0)$ . Аналогично определяется **частное приращение функции по переменной  $y$**  в точке  $(x_0, y_0)$ :  $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ .

**Частной производной** функции  $z = f(x, y)$  называется предел отношения частного приращения функции к частному приращению соответствующего аргумента, если последнее стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

По определению частная производная функции двух переменных находится как производная функции одной переменной, когда вторая переменная остаётся постоянной. Поэтому вычисление частных производных ничем не отличается от вычисления производных функции одной переменной и выполняется по тем же правилам.



Пример 2. Найти частные производные функции двух переменных  $z = 2x^3y - 7xy^2 - 3x + 5$ .

Решение. Найдём частную производную по переменной  $x$ , считая переменную  $y$  постоянной:  $z'_x = 6x^2y - 7y^2 - 3$ . Теперь будем считать, что переменная  $x$  остаётся постоянной:  $z'_y = 2x^3 - 14xy$ .

Предположим, что частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  функции  $z = f(x, y)$  в свою очередь являются функциями независимых переменных  $x$  и  $y$ . Тогда частные производные от этих частных производных называются частными производными второго порядка или вторыми частными производными функции  $z = f(x, y)$ :  $z''_{xx} = (z'_x)'_x$ ,  $z''_{xy} = (z'_x)'_y$ ,  $z''_{yx} = (z'_y)'_x$ ,  $z''_{yy} = (z'_y)'_y$ . Производные  $z''_{xy}$  и  $z''_{yx}$  называются смешанными. Для функций, удовлетворяющих некоторым определенным условиям, они равны между собой.

Пример 3. Найти частные производные второго порядка функции  $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$ .

Решение.  $z'_x = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$ ,  $z'_y = 2x^3y - 9xy^2 - x$ ,

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2y^2 - 3y^3 - y)'_x = 6xy^2,$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2y^2 - 3y^3 - y)'_y = 6x^2y - 9y^2 - 1,$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (2x^3y - 9xy^2 - x)'_x = 6x^2y - 9y^2 - 1,$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (2x^3y - 9xy^2 - x)'_y = 2x^3 - 18xy.$$

## 6.2. Экстремум функции двух переменных

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена в некоторой области  $D = \{x, y\}$  и пусть точка  $P_0(x_0, y_0) \in D$ . Точка  $P_0(x_0, y_0)$  называется **точкой максимума** функции  $z = f(x, y)$ , если  $f(x_0, y_0)$  есть наибольшее значение функции в окрестности этой точки. Точка  $P_0(x_0, y_0)$  называется **точкой минимума** функции  $z = f(x, y)$ , если



$f(x_0, y_0)$  есть наименьшее значение функции в окрестности этой точки. Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**.

Значение функции в точке максимума называется **максимумом функции**, а значение функции в точке минимума – **минимумом функции**. Максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.

Если в точке  $P_0(x_0, y_0)$  функция  $z = f(x, y)$  имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю, т. е.  $z'_x(x_0, y_0) = 0$  и  $z'_y(x_0, y_0) = 0$ . Это **необходимые условия экстремума**.

Точка, в которой обе частные производные равны нулю, называется **критической точкой** функции  $z = f(x, y)$ . Для отыскания критических точек функции нужно найти её частные производные, приравнять их нулю и решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \text{ Точки экстремума, если они есть, находятся среди критических точек функции.}$$

Пусть  $P_0(x_0, y_0)$  является критической точкой функции  $z = f(x, y)$ . Вычислим частные производные второго порядка в этой точке:  $z''_{xx}(x_0, y_0) = A$ ,  $z''_{yy}(x_0, y_0) = C$ ,  $z''_{xy}(x_0, y_0) = B$ . Составим выражение  $AC - B^2$  и проанализируем его знак:

1) если  $AC - B^2 > 0$ , то функция  $z = f(x, y)$  в точке  $P_0(x_0, y_0)$  имеет экстремум: максимум при  $A < 0$  и минимум при  $A > 0$ ;

2) если  $AC - B^2 < 0$ , то функция  $z = f(x, y)$  в точке  $P_0(x_0, y_0)$  экстремума не имеет;

3) если  $AC - B^2 = 0$ , то для определения экстремума нужны дополнительные исследования.

Рассмотренные условия называются **достаточными условиями экстремума**.

Пример 4. Исследовать функцию  $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$  на экстремум.



Решение. Найдём частные производные  $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$ ,  
 $z'_y = 2xy + 2y$  и решим систему уравнений  $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$  Из

второго уравнения  $2y(x + 1) = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ . Подставим  $y = 0$  в первое уравнение:  $6x^2 + 10x = 0$ ,  $2x(3x + 5) = 0$ ,  $x = 0$ ,  $3x + 5 = 0$ ,  $x = -\frac{5}{3}$ . Та-

ким образом, найдены две критические точки  $M_1(0, 0)$ ,  $M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ .

Теперь в первое уравнение подставим  $x = -1$ :  $6 + y^2 - 10 = 0$ ,  $y^2 = 4$ ,  
 $y = -2$ ,  $y = 2$ . Следовательно, стали известны ещё две критические  
точки  $M_3(-1, -2)$ ,  $M_4(-1, 2)$ . Найдём частные производные второго  
порядка:  $z''_{xx} = 12x + 10$ ,  $z''_{xy} = 2y$ ,  $z''_{yy} = 2x + 2$ .

Проверим достаточные условия для точки  $M_1(0, 0)$ :

$$A = z''_{xx}(0, 0) = 12 \cdot 0 + 10 = 10, \quad B = z''_{xy}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0,$$

$C = z''_{yy}(0, 0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$ ,  $AC - B^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 10$ . Следовательно,  
в точке  $M_1(0, 0)$  функция имеет экстремум. Так как  $A > 0$ , то это  
минимум. При этом  $z_{\min} = 2 \cdot 0^3 - 0 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 0^2 = 0$ .

Аналогично установим, что в точке  $M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$  функция имеет  
максимум, причём  $z_{\max} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 0^2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0^2 = 4 \frac{17}{27}$ .

В точках  $M_3(-1, -2)$  и  $M_4(-1, 2)$  экстремума нет.

### 6.3. Метод наименьших квадратов

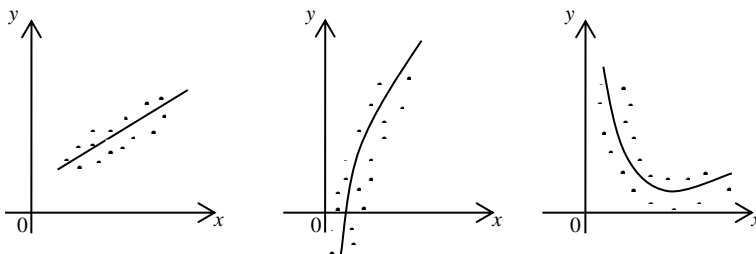
На практике при изучении всевозможных процессов часто возникает необходимость найти зависимости между участвующими в процессах величинами. Эти зависимости выражают математическими формулами. Формулы, которые составлены на основании обработки изучаемых данных, называются **эмпирическими**. Одним из методов получения эмпирических формул является **метод наименьших квадратов**.



Пусть существует некоторая зависимость между переменными величинами  $x$  и  $y$ . Возьмём результаты  $n$  наблюдений этих величин и запишем их значения в таблицу:

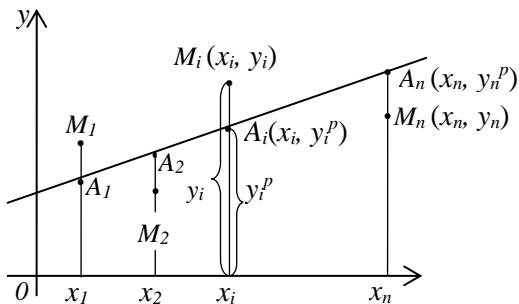
$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_i$	...	$y_n$

Эта таблица указывает на некоторую функциональную зависимость между переменными  $x$  и  $y$ . Требуется установить форму этой зависимости в аналитическом виде.



Будем рассматривать упорядоченные пары чисел  $(x_i, y)$  данной таблицы как точки в прямоугольной системе координат. Может оказаться, что эти точки на графике будут группироваться около некоторой линии. Если этой линией будет прямая, то целесообразно приближённо считать зависимость между переменными  $x$  и  $y$  линейной и искать её в виде уравнения прямой линии  $y^p = ax + b$ , где  $y^p$  -  $y$  расчетное, а коэффициенты  $a$  и  $b$  нужно определить. Таким образом, перед нами стоит задача так определить коэффициенты  $a$  и  $b$ , чтобы полученная прямая «наилучшим образом» проходила через множество точек  $(x_i, y)$ .

Обозначим через  $M_i(x_i, y_i)$  наблюдаемые пары значений  $(x_i, y)$ , а через  $A_i(x_i, y_i^p)$  – соответствующие точки на прямой  $y^p = ax + b$ .



Если сумма расстояний точек  $M_i(x_i, y_i)$  от соответствующих точек  $A_i(x_i, y_i^p)$  будет наименьшей, то прямая  $y^p = ax + b$  будет «наилучшим образом» проходить через точки  $M_i(x_i, y_i)$ , т. е. в этом случае должно выполняться следующее условие:

$$\begin{aligned} & |y_1^p - y_1| + |y_2^p - y_2| + \dots + |y_i^p - y_i| + \dots + |y_n^p - y_n| \rightarrow \min \\ \text{или } f(a, b) &= |ax_1 + b - y_1| + |ax_2 + b - y_2| + \dots + |ax_i + b - y_i| + \\ & + \dots + |ax_n + b - y_n| \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Разности  $y_i^p - y_i$  или  $ax_i + b - y_i$  называются погрешностями, а функция  $f(a, b)$  есть функция двух переменных  $a$  и  $b$ . Следовательно, задача сводится к подбору таких коэффициентов  $a$  и  $b$ , чтобы сумма абсолютных величин погрешностей была наименьшей.

Рассмотрим функцию

$$F(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Эта функция является функцией двух независимых переменных  $a$  и  $b$ . Если можно будет найти минимум функции  $F(a, b)$  при некоторых значениях  $a$  и  $b$ , то при этих же значениях функция  $f(a, b)$  также будет иметь минимум. Таким образом, задача отыскания «наилучшей прямой» сводится к задаче отыскания минимума функции двух переменных.

Необходимым условием экстремума функции  $F(a, b)$  в точке  $(a, b)$  является равенство нулю её частных производных  $F'_a$  и  $F'_b$ , т. е.



$$\begin{cases} 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + \dots + 2(ax_n + b - y_n)x_n = 0, \\ 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \dots + 2(ax_n + b - y_n) = 0. \end{cases}$$

Преобразуем и получим:

$$\begin{cases} a(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n, \\ a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + bn = y_1 + y_2 + \dots + y_n. \end{cases}$$

Запишем суммы в сокращённом виде:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_n = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Тогда система примет вид:

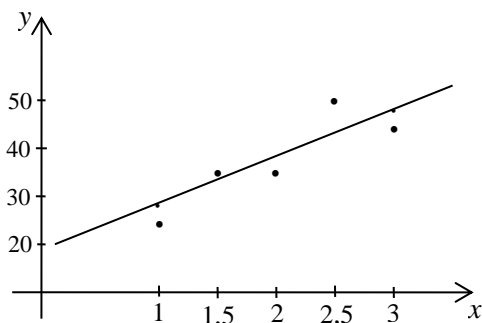
$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_iy_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Полученная система двух уравнений с двумя неизвестными называется **нормальной системой метода наименьших квадратов при выравнивании по прямой**. Решив эту систему, найдём значения  $a$  и  $b$  и подставим их в уравнение  $y^p = ax + b$ . Полученная прямая и будет «наилучшей». Уравнение  $y^p = ax + b$  называется **уравнением регрессии** и выражает линейную зависимость переменной  $y$  от переменной  $x$ . Коэффициент  $a$  называется **коэффициентом регрессии** и показывает, как изменится переменная  $y$  при изменении переменной  $x$  на единицу.

Пример 5. На основании опытных данных построить точки  $M_i(x_i, y_i)$  и по точечной диаграмме определить вид эмпирической зависимости. Затем методом наименьших квадратов найти параметры эмпирической функции.

$x_i$	1	1,5	2	2,5	3
$y_i$	25	36	35	50	45

Решение. Построим точки  $M_i(x_i, y_i)$ .



На диаграмме видно, что эти точки группируются около прямой линии. Поэтому эмпирическую зависимость будем считать линейной и искать её в виде уравнения прямой линии  $y^p = ax + b$ . Для определения параметров  $a$  и  $b$  заполним таблицу:

№ п/п	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$y_i^p$
1	1	25	1	25	27,4
2	1,5	36	2,25	54	32,8
3	2	35	4	70	38,2
4	2,5	50	6,25	125	43,6
5	3	45	9	135	49
$n = 5$	$\sum_{i=1}^n x_i = 10$	$\sum_{i=1}^n y_i = 191$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 22,5$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 409$	

Запишем нормальную систему:  $\begin{cases} 22,5a + 10b = 409, \\ 10a + 5b = 191. \end{cases}$  Решив эту систему, получим  $a = 10,8$ ,  $b = 16,6$ . Следовательно, эмпирическая зависимость задаётся уравнением  $y^p = 10,8x + 16,6$ .

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти частные производные первого и второго порядков функций: а)  $z = 3x^2 - 4xy^2 + 5y^3 - 2x + y - 1$ ; б)  $z = 2x^2 y^3 - 3x^3 y + xy$ ;



в)  $z = \frac{xy}{x+y}$ ; г)  $z = (x+y) \cdot \sin(x+y)$ .

2. Исследовать функции на экстремум:

а)  $z = xy - x^2 - 3y^2 + x + 10y - 8$ ;

б)  $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$ ;

в)  $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1$ .

## Лекция 7. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 7.1. Неопределённый интеграл и его свойства

Функция  $F(x)$  называется **первообразной функцией** для функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$ . Если  $F(x)$  есть первообразная функция для функции  $f(x)$ , то каждая из функций  $F(x)+C$ , где  $C$  – произвольная постоянная, будет также первообразной для функции  $f(x)$ . Это означает, что если функция  $f(x)$  имеет хотя бы одну первообразную функцию, то она имеет бесконечное множество первообразных функций и все они отличаются друг от друга на постоянную величину.

Совокупность всех первообразных функций  $F(x)+C$  для функции  $f(x)$  называется **неопределённым интегралом** от функции  $f(x)$  и обозначается  $\int f(x)dx = F(x)+C$ . Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**. Переменная  $x$  называется **переменной интегрирования**, функция  $f(x)$  называется **подынтегральной функцией**, выражение  $f(x)dx$  – **подынтегральным выражением**.

Неопределённый интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций.

- Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т. е.  $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ .
- Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.  $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ .
- Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т. е.  $\int dF(x) = F(x) + C$ .



• Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:  
$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx .$$

• Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.  
$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx .$$

• Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то при замене переменной интегрирования  $x$  на  $t$   $\int f(t)dt = F(t) + C$ . Такое свойство называется **инвариантностью формулы интегрирования**.

При интегрировании удобно пользоваться формулами, которые составляют основную таблицу интегралов:

1	$\int dx = x + C$	7	$\int \cos x dx = \sin x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	8	$\int \frac{1}{\cos^2 x dx} = \operatorname{tg} x + C$
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	9	$\int \frac{1}{\sin^2 x dx} = -\operatorname{ctg} x + C$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	10	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$		

Интегралы, занесённые в таблицу, называются **табличными**. Каждая из формул таблицы справедлива в области определения подынтегральной функции.

## 7.2. Основные методы интегрирования

При интегрировании функций не всегда можно сразу использовать таблицу интегралов. Как правило, вначале нужно данный интеграл



преобразовать таким образом, чтобы свести его к одной или нескольким формулам таблицы. Для этого используются специальные методы интегрирования, основными из которых являются **непосредственное интегрирование, замена переменной (или метод подстановки), метод интегрирования по частям**.

Суть метода непосредственного интегрирования состоит в том, что данный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств неопределённого интеграла сводится к табличным интегралам. При этом часто удобно пользоваться некоторыми преобразованиями дифференциала, которые называются «подведением под знак дифференциала»:

- $du = d(u + a)$ , где  $a$  – число;
- $du = \frac{1}{a} d(au)$ , где  $a$  – некоторое не равное нулю число;
- $udu = \frac{1}{2} d(u^2)$ ;
- $\cos u \cdot du = d(\sin u)$ ;
- $\sin u \cdot du = -d(\cos u)$ ;
- $\frac{1}{u} du = d(\ln u)$ ;
- $\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tgu})$ .

Примеры 1–4. Найти неопределённые интегралы:

а)  $\int x^6 dx$ ; б)  $\int (2x^3 - 4x^2 + 5) dx$ ;

в)  $\int \left( x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$ ;

г)  $\int \left( 3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$ .

Решение. а)  $\int x^2 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$ ;



$$\begin{aligned} \text{б) } \int (2x^3 - 4x^2 + 5) dx &= 2 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 5 \int dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + \\ &+ 5 \cdot x + C = \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 5x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int \left( x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx &= \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx - \\ - 4 \int \sin x dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \frac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x - 4 \cdot (-\cos x) + \operatorname{tg} x + C = \\ &= \frac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x + 4 \cos x + \operatorname{tg} x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \int \left( 3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= 3 \int x^{\frac{3}{4}} dx - 2 \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= 3 \int x^{\frac{3}{4}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \operatorname{arctg} x + C = \\ &= 3 \cdot \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}} x^{\frac{7}{4}} - 2 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + \operatorname{arctg} x + C = \frac{12}{7} \sqrt[4]{x^7} - 3\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Если интеграл непосредственно не находится, то во многих случаях результат может быть достигнут с помощью **метода замены переменной (подстановки)**. Данный метод помогает значительно упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к одной из формул таблицы.

Если подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя, то такой интеграл равен логарифму натуральному от абсолютной величины знаменателя, т. е.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

Примеры 5–9. Найти интегралы: а)  $\int \sin 3x dx$ ;



$$\text{б) } \int (3-x)^5 dx; \text{ в) } \int \sqrt[5]{3x-4} dx; \text{ г) } \int x e^{x^2} dx; \text{ д) } \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5} dx.$$

Решение. а)  $\int \sin 3x dx = \{ \text{заменяем } u = 3x, \text{ тогда } du = 3dx, dx = \frac{du}{3} \} = \int \sin u \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \sin u du = \frac{1}{3} (-\cos u) + C = -\frac{1}{3} \cos 3x + C;$

$$\text{б) } \int (3-x)^5 dx = \{ \text{заменяем } u = 3-x, du = -dx, dx = -du \} = \int u^5 (-du) = -\int u^5 du = -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{(3-x)^6}{6} + C;$$

$$\text{в) } \int \sqrt[5]{3x-4} dx = \{ u=3x-4, du=3dx, dx = \frac{du}{3} \} = \int \sqrt[5]{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{5}} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18} \sqrt[5]{u^6} + C = \frac{5}{18} \sqrt[5]{(3x-4)^6} + C;$$

$$\text{г) } \int x e^{x^2} dx = \{ u = x^2, du = 2x dx, x dx = \frac{du}{2} \} = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C;$$

$$\text{д) } \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5} dx = \{ u = x^3-3x+5, du = (3x^2-3) dx = 3(x^2-1) dx, (x^2-1) dx = \frac{du}{3} \} = \int \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3-3x+5| + C.$$

В общем случае формулы для вычисления интеграла от произведения двух функций не существует. Однако, если одна из функций, например, многочлен, другая логарифмическая, показательная, тригонометрическая или обратная тригонометрическая, интеграл может быть найден с помощью метода интегрирования по частям. Суть метода заключается в том, что вычисляемый интеграл должен быть представлен в виде  $\int u dv$ .



Для нахождения интеграла вида  $\int u dv$  используется **формула интегрирования по частям**  $\int u dv = uv - \int v du$ . Если в результате получилось, что интеграл в правой части формулы проще, чем в левой, то применение этой формулы оправдано. Обычно в подынтегральном выражении за функцию  $u$  принимают тот множитель, который после его дифференцирования становится более простым. Оставшуюся часть подынтегрального выражения принимают за дифференциал  $dv$  некоторой функции  $v$ .

При использовании данного метода интегрирования удобно пользоваться следующими рекомендациями:

- в интегралах вида  $\int P(x)e^{kx} dx$ ,  $\int P(x) \sin x dx$ ,  $\int P(x) \cos x dx$  имеет смысл положить  $u = P(x)$ , а в качестве  $dv$  взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;

- в интегралах вида  $\int P(x) \arcsin x dx$ ,  $\int P(x) \arccos x dx$ ,  $\int P(x) \operatorname{arctg} x dx$ ,  $\int P(x) \operatorname{arcctg} x dx$ ,  $\int P(x) \ln x dx$  следует положить  $dv = P(x) dx$ , а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через  $u$ ;

- в интегралах вида  $\int e^{ax} \sin b x dx$ ,  $\int e^{ax} \cos b x dx$  можно положить, например,  $u = e^{ax}$ , а оставшуюся часть подынтегрального выражения принять за  $dv$ . Применяя формулу интегрирования по частям два раза, получают результат.

Примеры 10–13. Найти интегралы: а)  $\int x \cos x dx$ ;

б)  $\int (2x+1)e^{3x} dx$ ; в)  $\int \ln x dx$ ; г)  $\int x^2 e^{5x} dx$ .

Решение. а)  $\int x \cos x dx = \{u = x, du = dx, dv = \cos x dx,$

$\int dv = \int \cos x dx, v = \sin x\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$ ;

б)  $\int (2x+1)e^{3x} dx = \{u = 2x+1, du = 2dx, dv = e^{3x} dx, \int dv = \int e^{3x} dx,$

$v = \frac{1}{3} e^{3x}\} = (2x+1) \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e \cdot 2dx = \frac{1}{3} (2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx =$

$= \frac{1}{3} (2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C = \frac{1}{3} (2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9} e^{3x} + C =$



$$= \frac{1}{3} e^{3x} \left( 2x + \frac{1}{3} \right) + C;$$

$$\text{в) } \int \ln x dx = \{ u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, dv = dx, \int dv = \int dx, v = x \} =$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C;$$

$$\text{г) } \int x^2 e^{5x} dx = \{ u = x^2, du = 2x dx, dv = e^{5x} dx, \int dv = \int e^{5x} dx,$$

$$v = \frac{1}{5} e^{5x} \} = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \int \frac{1}{5} e^{5x} \cdot 2x dx = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx = \{ \text{к}$$

интегралу ещё раз применим интегрирование по частям:  $u = x,$   
 $du = dx,$

$$\begin{aligned} dv = e^{5x} dx, \int dv = \int e^{5x} dx, v = \frac{1}{5} e^{5x} \} &= \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \\ - \frac{2}{5} \left( x \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right) &= \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \left( \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} e^{5x} \right) + C = \\ = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{25} x e^{5x} + \frac{2}{125} e^{5x} + C &= \frac{1}{5} e^{5x} \left( x^2 - \frac{2}{5} x + \frac{2}{25} \right) + C. \end{aligned}$$

### 7.3. Интегрирование рациональных и иррациональных функций

Если числитель и знаменатель дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  являются многочленами,

то функция вида  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  называется **рациональной**. Рациональная дробь

$\frac{P(x)}{Q(x)}$  называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя. Если же степень числителя больше либо

равна степени знаменателя, то рациональная дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  называется

**неправильной**.



Всякая неправильная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби. Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 14. Представить неправильную дробь  $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 2}$  в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение. Разделим числитель на знаменатель (деление многочленов) и получим  $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 2x + 1 + \frac{4}{x - 2}$ .

Дроби вида  $\frac{A}{x - a}$ ,  $\frac{A}{(x - a)^n}$ ,  $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$  называются простейшими рациональными дробями. Всякую правильную дробь можно представить в виде суммы конечного числа простейших дробей.

Пример 15. Разложить правильную дробь  $\frac{2x - 3}{(x + 1)(x - 3)}$  на простейшие.

Решение. Для разложения дроби на простейшие используем метод неопределённых коэффициентов:  $\frac{2x - 3}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} =$

$$= \frac{A(x - 3) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{Ax - 3A + Bx + B}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{(A + B)x - 3A + B}{(x + 1)(x - 3)}.$$

Начальная дробь равна конечной и знаменатели у них одинаковы. Следовательно, должны быть равными и числители:  $\begin{cases} A + B = 2, \\ -3A + B = -3. \end{cases}$  Решая

данную систему уравнений, найдём:  $A = \frac{5}{4}$ ,  $B = \frac{3}{4}$ . Тогда разложение

$$\text{дроби на простейшие имеет следующий вид: } \frac{2x - 3}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{5}{4} \cdot \frac{A}{x + 1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{B}{x - 3}.$$

При интегрировании простейших рациональных дробей можно использовать формулы:



- $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C;$
- $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$   
 $= \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C;$
- $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax}{x^2+px+q} dx + \int \frac{B}{x^2+px+q} dx.$

Пример 16. Найти интеграл  $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} dx.$

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы многочлена и правильной дроби, предварительно разделив числитель

на знаменатель:  $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} = x - 2 + \frac{7x - 3}{x^2 + 2x - 3}.$  Разложим получен-

ную правильную рациональную дробь на простейшие. Для этого вна-  
чале знаменатель разложим на множители:  $x^2 + 2x - 3 = 0, x_1 = -3,$

$x_2 = 1, x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1).$  Тогда  $\frac{7x-3}{x^2+2x-3} = \frac{7x-3}{(x+3)(x-1)} =$

$$= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{Ax - A + Bx + 3B}{(x+3)(x-1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x - A + 3B}{(x+3)(x-1)}. \text{ Так как } \frac{7x-3}{(x+3)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A + 3B}{(x+3)(x-1)}, \text{ то}$$

$$\begin{cases} A+B=7, \\ -A+3B=-3. \end{cases} \text{ Решив данную систему, найдём } B=1, A=6. \text{ Тогда}$$

$$\frac{7x-3}{x^2+2x-3} = \frac{7x-3}{(x+3)(x-1)} = \frac{6}{x+3} + \frac{1}{x-1}. \text{ Подставим в подынтеграль-}$$

$$\text{ную функцию: } \int \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3} dx = \int \left( x - 2 + \frac{7x-3}{(x+3)(x-1)} \right) dx =$$



$$= \int \left( x - 2 + \frac{6}{x+3} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 6 \ln|x+3| + \ln|x-1| + C.$$

Если подынтегральная функция иррациональна, то с помощью замены переменной во многих случаях можно привести её к рациональному виду или к такой функции, интеграл от которой является табличным. Интегрирование при помощи замены переменной, которая приводит подынтегральное выражение к рациональному виду, называется **интегрированием посредством рационализации подынтегрального выражения**.

Интегралы вида  $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_s]{x^{m_s}}\right) dx$  приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки  $x = t^k$ , где  $k$  – наименьшее общее кратное чисел  $n_1, n_2, \dots, n_s$ .

Интегралы вида  $\int R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}\right) dx$  приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки  $t = \sqrt[m]{ax+b}$ .

Пример 17. Найти интеграл  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx$ .

Решение. Показателями степеней корней являются числа 3 и 2. Их наименьшее общее кратное равно 6. Поэтому применим подстановку  $x = t^6$ . Тогда  $dx = 6t^5 dt$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ ,  $\sqrt[3]{x^2} = t^4$ ,  $\sqrt{x} = t^3$ . В результате

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^7}{t^3(t-1)} dt = 6 \int \frac{t^4}{t-1} dt.$$

В подынтегральной функции выделим целую часть:  $\frac{t^4}{t-1} = \frac{t^4 - 1 + 1}{t-1} = \frac{t^4 - 1}{t-1} +$

$$+ \frac{1}{t-1} = \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} = \frac{(t-1)(t+1)(t^2 + 1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} =$$

$$= (t+1)(t^2 + 1) + \frac{1}{t-1} = t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}. \text{ Тогда } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx =$$



$$\begin{aligned} &= 6 \int \left( t_3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| + C = \\ &= \{ \text{подставим } \sqrt[6]{x} \text{ вместо } t = \\ &= \frac{\sqrt[6]{x^4}}{4} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} + \frac{\sqrt[6]{x^2}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C = \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C. \end{aligned}$$

#### 7.4. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

При нахождении интегралов  $\int \sin ax \cdot \cos bxdx$ ,  $\int \cos ax \cdot \cos bxdx$ ,  $\int \sin ax \cdot \sin bxdx$  подынтегральные функции из произведений преобразовываются в суммы с помощью следующих формул:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\sin(a-b)x + \sin(a+b)x);$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x + \cos(a+b)x);$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

При интегрировании таких функций удобно пользоваться формулами  $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$  и  $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$ .

Примеры 18–20. Найти интегралы а)  $\int \sin 3x \cdot \cos 5xdx$ ;

б)  $\int \cos^3 x dx$ ; в)  $\int \cos^2 x \cdot \sin^5 x dx$ .

Решение. а) Так как  $\sin 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} (\sin(3-5)x + \sin(3+5)x) =$

$$= \frac{1}{2} (-\sin 2x + \sin 8x), \text{ то } \int \sin 3x \cdot \cos 5xdx = \frac{1}{2} \int (-\sin 2x + \sin 8x) dx =$$



$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{8} \right) + C = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C;$$

б)  $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \{ \text{применим}$

подстановку  $t = \sin x$ , тогда  $dt = \cos x dx \}$   $= \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C =$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

в)  $\int \cos^2 x \cdot \sin^5 x dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx =$

$$= \int \cos^2 x \cdot (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x dx = \int \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx = \{ \text{применим}$$

подстановку  $t = \cos x$ , тогда  $dt = -\sin x dx$ ,  $\sin x dx = -dt \}$   $=$

$$= \int t^2 (1 - t^2)^2 (-dt) = - \int t^2 (1 - 2t^2 + t^4) dt = - \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt =$$

$$= - \left( \frac{t^3}{3} - 2 \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right) + C = - \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2 \cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти неопределённые интегралы непосредственным интегрированием:

а)  $\int \left( 4x^3 + \frac{3}{x^4} + 3 \sin x + 1 \right) dx$ ; б)  $\int \left( 6x^5 + \frac{4}{x^5} + \frac{1}{1+x^2} - 5 \right) dx$ ;

в)  $\int \left( 5x^4 + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{\cos^2 x} - 5 \right) dx$ ; г)  $\int \left( \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 4\sqrt{x} \right) dx$ ;

д)  $\int \frac{2x + \sqrt{x} + \sqrt{x}e^x}{\sqrt{x}} dx$ ; е)  $\int \frac{\cos^3 x - 8\sqrt[5]{x^3} + 3}{\cos^2 x} dx$ .

2. Найти неопределённые интегралы, используя метод замены переменной:

а)  $\int (3x+4)^{100} dx$ ; б)  $\int \cos(7x+3) dx$ ; в)  $\int \sqrt{2x+3} dx$ ;

г)  $\int \frac{1}{7-3x} dx$ ; д)  $\int x\sqrt{x^2+5} dx$ ; е)  $\int x^2 e^{x^3+4} dx$ ;



$$\text{ж) } \int \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx; \text{ з) } \int \frac{x+3}{x^2+6x-1} dx; \text{ и) } \int \frac{\sqrt[4]{\ln x+1}}{x} dx.$$

3. Найти неопределённые интегралы интегрированием по частям:

$$\text{а) } \int x e^{2x} dx; \text{ б) } \int x \ln(x-1) dx; \text{ в) } \int \operatorname{arctg} x dx; \text{ г) } \int \arcsin x dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \text{ е) } \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

4. Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \sin^2 3x dx; \text{ б) } \int \cos^4 x dx; \text{ в) } \int \cos^2 x \sin^2 x dx;$$

$$\text{г) } \int \cos^3 x \sin^2 x dx; \text{ д) } \int \frac{x^3}{x-2} dx; \text{ е) } \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}; \text{ з) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx.$$

## Лекция 8. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 8.1. Определённый интеграл и его основные свойства

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Выполним следующие действия:

разобьём отрезок  $[a, b]$  точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  на  $n$  отрезков  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ , которые называются частичными;

в каждом частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  произвольно выберем точку  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , вычислим значение функции в этой точке  $f(c_i)$  и произведение  $f(c_i)\Delta x_i$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ;

если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ , который не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a, b]$ , ни от выбора точек  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , то он называется **определённым интегралом** от функции  $y = f(x)$  на отрезке  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  и обозначается



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа  $a$  и  $b$  называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Функция  $f(x)$  называется *подынтегральной функцией*, выражение  $f(x)dx$  – *подынтегральным выражением*,  $x$  – *переменной интегрирования*,  $[a, b]$  – *отрезком интегрирования*.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $y = f(x) \geq 0$ . Фигура, ограниченная сверху графиком функции  $y = f(x)$ , снизу осью  $Ox$ , сбоку – прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , называется *криволинейной трапецией*.

**Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.** В этом состоит *геометрический смысл определённого интеграла*.

Определённый интеграл обладает следующими основными свойствами:

- постоянный множитель можно выносить за знак определённого

интеграла, т. е. 
$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx ;$$

- определённый интеграл от алгебраической суммы непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$  равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx ;$$

- если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определённый интеграл изменит знак на противоположный,

т. е. 
$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx ;$$

- если пределы интегрирования равны между собой, то определённый интеграл равен нулю, т. е.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 ;$$

- определённый интеграл не зависит от обозначения переменной

интегрирования, т. е. 
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots ;$$



• если отрезок интегрирования  $[a, b]$  разбит на две части  $[a, c]$  и  $[c, b]$  и, если существуют интегралы  $\int_a^c f(x)dx$  и  $\int_c^b f(x)dx$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Для вычисления определённых интегралов используется формула Ньютона – Лейбница  $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ , где  $F'(x) = f(x)$ , т. е.  $F(x)$  – любая первообразная функция для  $f(x)$ .

## 8.2. Методы вычисления определённых интегралов

При вычислении определённых интегралов используются методы **непосредственного интегрирования, замены переменной (подстановки) и интегрирования по частям.**

**Непосредственное интегрирование** предполагает сведение данного интеграла с помощью алгебраических и арифметических преобразований к формулам таблицы основных интегралов и использование формулы Ньютона - Лейбница.

Примеры 1–5. Вычислить интегралы: а)  $\int_1^2 x dx$ ; б)  $\int_0^\pi \sin x dx$ ;

в)  $\int_0^1 e^x dx$ ; г)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ ; д)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4} dx$ .

Решение. а)  $\int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ;

б)  $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$ ;

в)  $\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$ ;



$$г) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3};$$

$$д) \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{3x^3} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{3 \cdot 2^3} - \left( -\frac{1}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3} \right) = 2 \frac{5}{8}.$$

**Метод замены переменной** в определённом интеграле предполагает следующее. Пусть выполнены условия:

- функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
- функция  $x = \varphi(t)$  определена на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и имеет на нём непрерывную производную;
- $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ .

Тогда определённый интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  может быть вычислен с помощью введения новой переменной, и при этом справедлива формула  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ . Часто вместо замены  $x = \varphi(t)$  применяют обратную замену  $t = \psi(x)$ .

Примеры 6–8. Вычислить интегралы: а)  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ ;

б)  $\int_{-2}^0 \sqrt{1-4x} dx$ ; в)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$ .

Решение. а) Выполним замену  $t = x+1$ ,  $dt = dx$ . Вычислим пределы интегрирования для переменной  $t$ :

$x$	0	1
$t$	1	2

Тогда  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$ .



б) Выполним замену  $t = 1 - 4x$  и продифференцируем обе части равенства:  $dt = -4dx$ ,  $dx = -\frac{dt}{4}$ . Изменим пределы интегрирования:

$x$	$-2$	$0$
$t$	$9$	$1$

$$\begin{aligned} \text{В результате } \int_{-2}^0 \sqrt{1-4x} dx &= \int_9^1 \sqrt{t} \left(-\frac{dt}{4}\right) = -\frac{1}{4} \int_9^1 t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{4} \left. t^{\frac{3}{2}} \right|_9^1 = \\ &= -\frac{1}{6} \sqrt{t^3} \Big|_9^1 = -\frac{1}{6} \sqrt{1^3} - \left(-\frac{1}{6} \sqrt{9^3}\right) = -\frac{1}{6}(1-27) = \frac{13}{6} = 4\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

в) В данном случае выполним замену  $t = \sin x$ , тогда  $dt = \cos x dx$ . Для переменной  $t$  вычислим пределы интегрирования:

$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$
$t$	$0$	$1$

$$\text{Получим } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  имеют непрерывные производные на отрезке  $[a, b]$ . Тогда для определённого интеграла справедлива

**формула интегрирования по частям**  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ .

Примеры 9–10. Вычислить интегралы: а)  $\int_{\pi}^{2\pi} x \cos x dx$ ;

б)  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$ .

Решение. а) Положим  $u = x$ , тогда  $du = dx$ . Оставшуюся часть подынтегрального выражения примем за  $dv$ :  $dv = \cos x dx$ . Проинте-



грируем это выражение:  $\int dv = \int \cos x dx$ ,  $v = \sin x$ . Тогда по формуле

$$\begin{aligned} \text{интегрирования по частям получим: } & \int_{\pi}^{2\pi} x \cos x dx = x \sin x \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \\ & = 2\pi \sin 2\pi - \pi \sin \pi - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos \pi = 1 - (-1) = 2. \end{aligned}$$

б) Положим  $u = \ln x$ ,  $dv = \frac{1}{x^5} dx$ . Тогда  $du = \frac{1}{x} dx$ ,  $\int dv = \int \frac{1}{x^5} dx$ ,

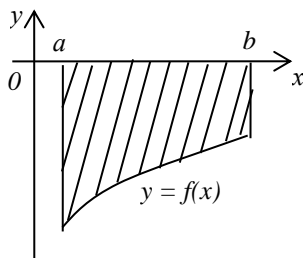
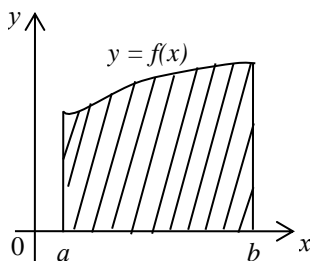
$$v = \int x^{-5} dx, \quad v = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}. \text{ По формуле интегрирования по частям}$$

$$\begin{aligned} \text{запишем: } & \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right) \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{4 \cdot 2^4} \ln 2 + \\ & + \frac{1}{4 \cdot 1^4} \ln 1 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{x^5} dx = \frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{-4}}{-4} \Big|_1^2 = \frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x^4}\right) \Big|_1^2 = \\ & = \frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1^4}\right) = \frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}. \end{aligned}$$

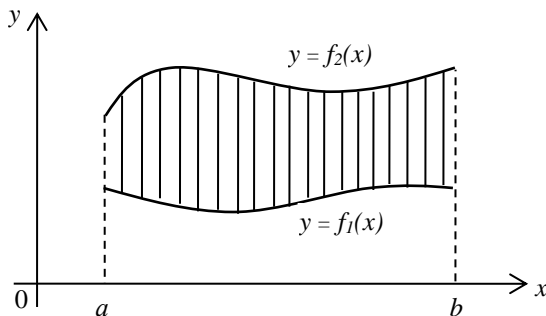
### 8.3. Вычисление площадей плоских фигур

Согласно геометрическому смыслу определённого интеграла площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс, равна определённому интегралу от функции  $f(x)$ :  $S = \int_a^b f(x) dx$ . Если

плоская фигура расположена ниже оси абсцисс, то её площадь может быть вычислена по формуле  $S = -\int_a^b f(x) dx$ .



Пусть фигура ограничена снизу графиком функции  $y = f_1(x)$ , сверху – графиком функции  $y = f_2(x)$ , слева – прямой  $x = a$  и справа – прямой  $x = b$ .



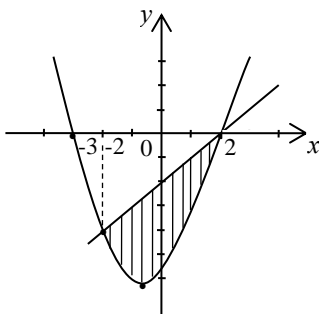
Тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, вычисляется по формуле  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ .

Пример 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + x - 6$ ,  $y - x + 2 = 0$ .

Решение. Графиком функции  $y = x^2 + x - 6$  является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём точки пересечения параболы с осью  $Ox$ :  $x^2 + x - 6 = 0$ ,  $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$ ,  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$ . Уравнение прямой  $y - x + 2 = 0$  запишем в виде  $y = x - 2$ . Изобразим эти



линии в системе координат и найдём площадь заштрихованной фигуры.



Найдём абсциссы точек пересечения линий:  $x^2 + x - 6 = x - 2$ ,  $x^2 - 4 = 0$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 2$ . Тогда площадь заштрихованной фигуры

$$\begin{aligned} \text{равна } \int_{-2}^2 (x-2 - (x^2 + x - 6)) dx &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + 4x \right)_{-2}^2 = \\ &= -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left( -\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 10 \frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы:

а)  $\int_0^5 (2t^2 - 3t + 2) dt$ ; б)  $\int_1^{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{x} dx$ ; в)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx$ ; г)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ ;

д)  $\int_1^2 \frac{4x-3}{2x^2-3x+4} dx$ ; е)  $\int_{\sqrt{3}}^0 x \sqrt{1+x^2} dx$ ; ж)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ ;

з)  $\int_0^1 \ln(x+1) dx$ ; и)  $\int_0^1 x \cdot \arctg x dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:



- а)  $y = -x^2 - 2x + 3, y = 0$  ; б)  $y = x^2 + 4x, y - x - 4 = 0$  ;  
в)  $y = -x^2 + 6x, y = 0$  ; г)  $y = 2x^2, x = 1, x = 2$  ;  
д)  $y = 3x^2 - 6x, x = 4$ , ось  $Ox$  на отрезке.

## Лекция 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### 9.1. Понятие дифференциального уравнения. Общее и частное решение

При изучении различных явлений часто не удаётся найти закон, который непосредственно связывает независимую переменную и искомую функцию, но можно установить связь между независимой переменной, искомой функцией и её производными.

Соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные, называется *дифференциальным уравнением*:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

где  $x$  – независимая переменная,  $y$  – искомая функция,  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  – производные искомой функции. При этом в соотношении (1) обязательно наличие хотя бы одной производной.

*Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

Так как в это уравнение входит производная только первого порядка, то оно называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если уравнение (2) можно разрешить относительно производной и записать в виде

$$y' = f(x, y), \quad (3)$$

то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме*.



Во многих случаях целесообразно рассматривать уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (4)$$

которое называется **дифференциальным уравнением первого порядка, записанным в дифференциальной форме.**

Так как  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{или} \quad f(x, y)dx - dy = 0, \quad \text{где можно считать}$$

$P(x, y) = f(x, y)$  и  $Q(x, y) = -1$ . Это означает, что уравнение (3) преобразовано в уравнение (4).

Запишем уравнение (4) в виде  $P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ . Тогда

$$Q(x, y)y' = -P(x, y), \quad y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0, \quad \text{где можно считать}$$

$$f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad \text{т. е. получено уравнение вида (3). Таким образом,}$$

уравнения (3) и (4) равносильны.

**Решением дифференциального уравнения** (2) или (3) называется любая функция  $y = \varphi(x)$ , которая при подстановке её в уравнение (2) или (3) обращает его в тождество:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \quad \text{или} \quad \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения называется его **интегрированием**, а график решения  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения называется **интегральной кривой** этого уравнения.

Если решение дифференциального уравнения получено в неявном виде  $\Phi(x, y) = 0$ , то оно называется **интегралом** данного дифференциального уравнения.

**Общим решением** дифференциального уравнения первого порядка называется семейство функций вида  $y = \varphi(x, C)$ , зависящее от произвольной постоянной  $C$ . Каждая из функций является решением данно-



го дифференциального уравнения при любом допустимом значении произвольной постоянной  $C$ . Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

**Частным решением** дифференциального уравнения называется решение, получаемое из формулы общего решения при конкретном значении произвольной постоянной  $C$ , включая  $\pm\infty$ .

## 9.2. Задача Коши и её геометрическая интерпретация

Уравнение (2) имеет бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выделить одно решение, которое называется частным, нужно задать некоторые дополнительные условия.

Задача отыскания частного решения уравнения (2) при заданных условиях называется **задачей Коши**. Эта задача является одной из важнейших в теории дифференциальных уравнений.

Формулируется задача Коши следующим образом: **среди всех решений уравнения (2) найти такое решение  $y = y(x)$ , в котором функция  $y(x)$  принимает заданное числовое значение  $y_0$ , если независимая переменная  $x$  принимает заданное числовое значение  $x_0$** , т. е.

$$y(x_0) = y_0, (x_0, y_0) \in D, \quad (5)$$

где  $D$  – область определения функции  $f(x, y)$ .

Значение  $y_0$  называется **начальным значением функции**, а  $x_0$  – **начальным значением независимой переменной**. Условие (5) называется **начальным условием**, или **условием Коши**.

С геометрической точки зрения задачу Коши для дифференциального уравнения (2) можно сформулировать следующим образом: **из множества интегральных кривых уравнения (2) выделить ту, которая проходит через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$** .



### 9.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Одним из простейших видов дифференциальных уравнений является дифференциальное уравнение первого порядка, не содержащее искомой функции:

$$y' = f(x). \quad (6)$$

Учитывая, что  $y' = \frac{dy}{dx}$ , запишем уравнение в виде  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  или  $dy = f(x)dx$ . Интегрируя обе части последнего уравнения, получим:

$$\int dy = \int f(x)dx + C \text{ или} \\ y = \int f(x) + C. \quad (7)$$

Таким образом, уравнение (7) является общим решением уравнения (6).

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y' = 3x^2 - \sqrt[4]{x}$ .

Решение. Запишем уравнение в виде  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \sqrt[4]{x}$  или

$dy = \left( 3x^2 - x^{\frac{1}{4}} \right) dx$ . Проинтегрируем обе части полученного уравне-

ния:  $\int dy = \int \left( 3x^2 - x^{\frac{1}{4}} \right) dx$ ,  $y = \frac{3x^3}{3} - \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C$ . Окончательно запишем

$$y = x^3 - \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C.$$

Пример 2. Найти решение уравнения  $y' = \frac{1}{x}$  при условии  $y(1) = 2$ .



Решение. Найдём общее решение уравнения:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ,  $dy = \frac{1}{x} dx$ ,

$\int dy = \int \frac{1}{x} dx$ ,  $y = \ln|x| + C$ . По условию  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ . Подставим в

общее решение:  $2 = \ln 1 + C$  или  $C = 2$ . Найденное значение произвольной постоянной подставим в формулу общего решения:  $y = \ln|x| + 2$ . Это и есть частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному условию.

Уравнение

$$y' = f(y) \quad (8)$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка, не содержащим независимой переменной*. Запишем его в виде  $\frac{dy}{dx} = f(y)$

или  $dx = \frac{dy}{f(y)}$ . Проинтегрируем обе части последнего уравнения:

$$\int dx = \int \frac{dy}{f(y)} + C \quad \text{или} \quad x = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \quad \text{Таким образом,} \quad x = \int \frac{du}{f(y)} + C -$$

общее решение уравнения (8).

Пример 3. Найти общее решение уравнения  $y' = y^2$ .

Решение. Запишем это уравнение в виде  $\frac{dy}{dx} = y^2$  или  $dx = \frac{dy}{y^2}$

Тогда  $\int dx = \int \frac{dy}{y^2}$ ,  $x = \int y^{-2} dy$ ,  $x = \frac{y^{-1}}{-1} + C$ ,  $x = -\frac{1}{y} + C$ . Таким об-

разом,  $x = -\frac{1}{y} + C$  – общее решение данного уравнения.

Уравнение вида

$$y' = f(x)\varphi(y) \quad (9)$$

интегрируется с помощью разделения переменных. Для этого уравне-

ние запишем в виде  $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$ , а затем с помощью операций



умножения и деления приведём его к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от  $x$  и дифференциал  $dx$ , а во вторую часть – функция от  $y$  и дифференциал  $dy$ . Для этого обе части уравнения нужно умножить на  $dx$  и разделить на  $\varphi(y)$ . В результате получим уравнение

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx, \quad (10)$$

в котором переменные  $x$  и  $y$  разделены. Проинтегрируем обе части уравнения (10):  $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$ . Полученное соотношение является общим интегралом уравнения (9).

Пример 4. Проинтегрировать уравнение  $y' = \cos^2 y \cdot e^x$ .

Решение. Преобразуем уравнение и разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y \cdot e^x, \quad \frac{dy}{\cos^2 y} = e^x dx. \text{ Проинтегрируем: } \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int e^x dx,$$

$\operatorname{tg} y = e^x + C$  или  $\operatorname{tg} y - e^x - C = 0$  – общий интеграл данного уравнения.

Пусть уравнение задано в виде

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \quad (11)$$

Такое уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными* в симметрической форме.

Для разделения переменных нужно обе части уравнения разделить на  $N_1(y)M_2(x)$ :

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)} dx + \frac{M_2(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)} dy = 0. \quad (12)$$

Полученное уравнение называется *дифференциальным уравнением с разделёнными переменными*. Проинтегрируем уравнение (12):

$$\int \frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)} dx + \int \frac{M_2(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)} dy = C. \quad (13)$$



Соотношение (13) является общим интегралом дифференциального уравнения (11).

**Пример 5.** Проинтегрировать дифференциальное уравнение  $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$ .

**Решение.** Запишем уравнение в виде

$$y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0 \text{ и разделим обе его части на } x^2y^2,$$

$x \neq 0, y \neq 0$ . Полученное уравнение  $\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$  является

уравнением с разделёнными переменными. Проинтегрируем его:

$$\int \frac{x+1}{x^2} dx + \int \frac{1-y}{y^2} dy = C, \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{y^2} dy - \int \frac{1}{y} dy = C,$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C, \ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C. \text{ Последнее равенство яв-}$$

ляется общим интегралом данного дифференциального уравнения.

**Пример 6.** Найти частное решение дифференциального уравнения  $2xyu'+1+y^2=0$ , удовлетворяющее условию  $y(1)=1$ .

**Решение.** Учитывая, что  $y' = \frac{dy}{dx}$ , запишем уравнение в виде

$$2xy \frac{dy}{dx} + 1 + y^2 = 0, \text{ или } 2xydy + (1+y^2)dx = 0. \text{ Разделим переменные:}$$

$$\frac{2y}{1+y^2} dy + \frac{1}{x} dx = 0. \quad \text{Проинтегрируем это уравнение:}$$

$$\int \frac{2y}{1+y^2} dy + \int \frac{1}{x} dx = 0, \ln(1+y^2) + \ln|x| = \ln|C|, (1+y^2)x = C. \text{ Получен-}$$

ное соотношение является общим интегралом данного уравнения. По условию  $x_0=1, y_0=1$ . Подставим в общий интеграл и найдём  $C$ :

$$(1+1^2) \cdot 1 = 1, C = 1. \text{ Тогда выражение } (1+y^2) \cdot x = 1 \text{ является частным}$$

решением данного дифференциального уравнения, записанным в виде частного интеграла.



#### 9.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (14)$$

Называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**. Незвестная функция  $y(x)$  и её производная входят в это уравнение линейно, а функции  $p(x)$  и  $q(x)$  непрерывны.

Если  $q(x) \equiv 0$ , то уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \quad (15)$$

называется **линейным однородным**. Если  $q(x) \neq 0$ , то уравнение (14) называется **линейным неоднородным**.

Для нахождения решения уравнения (14) обычно используют **метод подстановки (Бернулли)**, суть которого заключается в следующем.

Решение уравнения (14) будем искать в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x)v(x), \quad (16)$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  - некоторые непрерывные функции. Подставим  $y = uv$  и производную  $y' = u'v + uv'$  в уравнение (14):

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \text{ или } u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Функцию  $v$  будем подбирать таким образом, чтобы выполнялось условие  $v' + p(x)v = 0$ . Тогда  $u'v = q(x)$ . Таким образом, для нахождения решения уравнения (14) нужно решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

Первое уравнение системы является линейным однородным уравнением и решить его можно методом разделения переменных:



$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -p(x)dx, \quad \int \frac{dv}{dx} = -\int p(x)dx,$$

$\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C|$ ,  $v = Ce^{-\int p(x)dx}$ . В качестве функции  $v(x)$  можно взять одно из частных решений однородного уравнения, т. е. при  $C = 1$   $v = e^{-\int p(x)dx}$ . Подставим во второе уравнение системы:  $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ , или  $u' = e^{\int p(x)dx} q(x)$ . Тогда  $u = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C$ . Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид  $y = e^{-\int p(x)dx} \left( \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \right)$ .

Пример 7. Решить уравнение  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ .

Решение. Решение уравнения будем искать в виде  $y = uv$ . Тогда  $y' = u'v + uv'$ . Подставим в уравнение:

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{или} \quad u'v + u \left( v' + \frac{1}{x}v \right) = \frac{\sin x}{x}.$$

Функцию  $v$  выберем таким образом, чтобы выполнялось равенство  $v' + \frac{v}{x} = 0$ . Тогда  $u'v = \frac{\sin x}{x}$ . Решим первое из этих уравнений методом

разделения переменных:  $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$ ,  $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$ ,  $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$ ,

$\ln|v| = -\ln|x|$ ,  $v = \frac{1}{x}$ . Функцию  $v$  подставим во второе уравнение:

$u' \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$ ,  $u' = \sin x$ ,  $u = \int \sin x dx$ ,  $u = -\cos x + C$ . Общим решением

данного уравнения является  $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$ .



## Лекция 10. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### 10.1. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

*Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \quad (1)$$

т. е. уравнение, которое содержит искомую функцию и её производные только в первой степени и не содержит их произведений. В этом уравнении  $p_1$  и  $p_2$  – некоторые числа, а функция  $f(x)$  задана на некотором интервале  $(a, b)$ .

Если  $f(x) = 0$  на интервале  $(a, b)$ , то уравнение (1) принимает вид

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \quad (2)$$

и называется *линейным однородным*. В противном случае уравнение (1) называется *линейным неоднородным*.

Рассмотрим комплексную функцию

$$y(x) = u(x) + iv(x), \quad (3)$$

где  $u(x)$  и  $v(x)$  – действительные функции. Если функция (3) является комплексным решением уравнения (2), то и действительная часть  $u(x)$ , и мнимая часть  $v(x)$  решения  $y(x)$  в отдельности являются решениями этого же однородного уравнения. Таким образом, всякое комплексное решение уравнения (2) порождает два действительных решения этого уравнения.

Решения однородного линейного уравнения обладают следующими свойствами.

- Если  $y_1$  есть решение уравнения (2), то и функция  $y(x) = Cy_1$ , где  $C$  – произвольная постоянная, также будет решением уравнения (2).



• Если  $y_1$  и  $y_2$  есть решения уравнения (2), то и функция  $y(x) = y_1 + y_2$  также будет решением уравнения (2).

• Если  $y_1$  и  $y_2$  есть решения уравнения (2), то их линейная комбинация  $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$  также будет решением уравнения (2), где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  называются **линейно зависимыми** на интервале  $(a, b)$ , если существуют такие числа  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , не равные нулю одновременно, что на этом интервале выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0. \quad (4)$$

Если равенство (4) имеет место только тогда, когда  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = 0$ , то функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  называются **линейно независимыми** на интервале  $(a, b)$ .

Пример 1. Функции  $y_1(x) = x$  и  $y_2(x) = 2x$  линейно зависимы, так как  $2y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$  на всей числовой прямой. В этом примере  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$ .

Пример 2. Функции  $y_1(x) = x$  и  $y_2(x) = x^2$  линейно независимы на любом интервале, так как равенство  $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \equiv 0$  возможно лишь в случае, когда и  $\alpha_1 = 0$ , и  $\alpha_2 = 0$ .

## 10.2. Построение общего решения линейного однородного уравнения

Для того чтобы найти общее решение уравнения (2), нужно найти два его линейно независимых решения  $y_1$  и  $y_2$ . Линейная комбинация этих решений  $y_o(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, и даст общее решение линейного однородного уравнения.

Линейно независимые решения уравнения (2) будем искать в виде

$$y = e^{\lambda x}, \quad (5)$$



где  $\lambda$  – некоторое число. Тогда  $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ . Подставим эти выражения в уравнение (2):

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p_1 \lambda e^{\lambda x} + p_2 e^{\lambda x} = 0, \text{ или } e^{\lambda x} (\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2) = 0.$$

Так как  $e^{\lambda x} \neq 0$ , то  $\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0$ . Таким образом, функция  $y = e^{\lambda x}$  будет решением уравнения (2), если  $\lambda$  будет удовлетворять уравнению

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется *характеристическим уравнением* для уравнения (2). Это уравнение является алгебраическим квадратным уравнением.

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  есть корни этого уравнения. Они могут быть или действительными и различными, или комплексными, или действительными и равными. Рассмотрим эти случаи.

- Пусть корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  характеристического уравнения действительные и различные. Тогда решениями уравнения (2) будут функции  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  и  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ . Эти решения линейно независимы, так как равенство  $\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} = 0$  может выполняться лишь тогда, когда и  $\alpha_1 = 0$ , и  $\alpha_2 = 0$ . Поэтому общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y_o(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

**Пример 3.** Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' - 6y' - 7y = 0$ .

**Решение.** Для данного линейного однородного уравнения составим характеристическое  $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$ . Корнями этого уравнения являются  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 7$ . Тогда функции  $y_1 = e^{-x}$  и  $y_2 = e^{7x}$  есть линейно независимые решения данного линейного однородного уравнения, а его искомое общее решение имеет вид  $y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{7x}$ .

- Пусть корни характеристического уравнения комплексные, т. е.  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ . Решения уравнения (2) можно записать в виде



$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ ,  $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ . По формулам Эйлера  $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$ ,  $e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x$ . Тогда  $y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$ ,  $y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$ . Как известно, если комплексная функция является решением линейного однородного уравнения, то решениями этого уравнения являются и действительная, и мнимая части этой функции. Таким образом, решениями уравнения (2) будут функции  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  и  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ . Так как равенство  $\alpha_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + \alpha_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (\alpha_1 \cos \beta x + \alpha_2 \sin \beta x) \equiv 0$  может выполняться только в том случае, если  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = 0$ , то эти решения линейно независимы. Следовательно, общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y_o(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

Решение. Для этого уравнения составим характеристическое  $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$  и решим его:  $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36$ ,  $\lambda_1 = \frac{-4 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$ ,  $\lambda_2 = \frac{-4 - \sqrt{-36}}{2} = -2 - 3i$ . Функции  $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$  и  $y_2 = e^{-2x} \sin 3x$  являются решениями данного дифференциального уравнения и линейно независимы. Поэтому  $y_o(x) = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x$  есть искомое общее решение дифференциального уравнения.

• Пусть корни характеристического уравнения действительные и равные, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Тогда решениями уравнения (2) являются функции  $y_1(x) = e^{\lambda x}$  и  $y_2 = x e^{\lambda x}$ . Эти решения линейно независимы, так как выражение  $\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x} (\alpha_1 + \alpha_2 x)$  может быть тожде-



ственно равным нулю только тогда, когда  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_2 = 0$ . Следовательно, общее решение уравнения (2) имеет вид  $y_o(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ .

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' - 8y' + 16y = 0$ .

Решение. Характеристическим уравнением для данного дифференциального уравнения является  $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ . Его корни  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Тогда искомым общим решением является  $y_o(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$ .

### 10.3. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1) равно сумме любого частного решения  $\bar{y}(x)$  неоднородного уравнения и общего решения  $y_o(x)$  соответствующего однородного уравнения:  $y(x) = \bar{y}(x) + y_o(x)$ .

В некоторых случаях частное решение неоднородного уравнения можно найти довольно просто по виду правой части  $f(x)$  уравнения (1). Рассмотрим случаи, когда это возможно.

Пусть неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m, \quad (7)$$

т. е. правая часть неоднородного уравнения является многочленом степени  $m$ . Если  $\lambda = 0$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде многочлена степени  $m$ , т. е.

$$\bar{y}(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m.$$

Коэффициенты  $A_0, A_1, \dots, A_m$  определяются в процессе нахождения частного решения.



Если же  $\lambda = 0$  является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\bar{y}(x) = x \cdot (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m).$$

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' - 3y' - 4y = 3x - 2$ .

Решение. Запишем однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному:  $y'' - 3y' - 4y = 0$ . Характеристическим уравнением для него является  $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ . Корни этого уравнения  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Тогда  $y_1 = e^{-x}$  и  $y_2 = e^{4x}$  являются частными решениями однородного уравнения, а  $y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$  есть общее решение однородного уравнения.

Так как  $\lambda = 0$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде  $\bar{y}(x) = Ax + B$ . Найдём производные первого и второго порядков и подставим в уравнение:  $\bar{y}' = A$ ,  $\bar{y}'' = 0$ ,  $0 - 3A - 4(Ax + B) = 3x - 2$ ,

$$-4Ax - 3A - 4B = 3x - 2. \text{ Тогда } \begin{cases} -4A = 3, \\ -3A - 4B = -2. \end{cases} \text{ Решив эту систему}$$

уравнений, найдём:  $A = -\frac{3}{4}$ ,  $B = -\frac{17}{8}$ . Следовательно, частным решением

неоднородного уравнения будет функция  $\bar{y}(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{17}{8}$ . Тогда

общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{17}{8} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' - 8y' = 2x + 5$ .

Решение. Данному линейному неоднородному уравнению соответствует однородное  $y'' - 8y' = 0$ . Характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 8\lambda = 0$  имеет корни  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 8$ . Линейно независимыми реше-



ниями однородного уравнения будут  $y_1 = e^{0x} = 1$  и  $y_2 = e^{8x}$ , а его общее решение имеет вид  $y_o(x) = C_1 + C_2 e^{8x}$ .

Так как  $\lambda = 0$  является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде  $\bar{y}(x) = x \cdot (Ax + B) = Ax^2 + Bx$ . Найдём производные первого и второго порядков:  $\bar{y}' = 2Ax + B$ ,  $\bar{y}'' = 2A$ . Подставим эти выражения в неоднородное уравнение:  $2A - 8(2Ax + B) = 2x + 5$ ,  $2A - 16Ax - 8B = 2x + 5$ .

Приравняем коэффициенты при  $x$  и свободные члены:  $\begin{cases} -16A = 2, \\ 2A - 8B = 5. \end{cases}$

Решив эту систему уравнений, найдём:  $A = -\frac{1}{8}$ ,  $B = -\frac{21}{32}$ . Следова-

тельно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{21}{32}x, \quad \text{а общим его решением является}$$

$$y(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{21}{32}x + C_1 + C_2 e^{8x}.$$

Пусть неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = e^{\lambda x} (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m). \quad (8)$$

Если  $\lambda = 0$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде  $\bar{y}(x) = e^{\lambda x} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m)$ . Если же  $\lambda = 0$  есть корень характеристического уравнения кратности  $k$  ( $k = 1$  или  $k = 2$ ), то в этом случае частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$\bar{y}(x) = e^{\lambda x} x^k (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m).$$

**Пример 8.** Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' + 3y' + 2y = e^{3x} \cdot 4x$ .

**Решение.** Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$  соответствующего однородного имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Функции



$y_1 = e^{-x}$  и  $y_2 = e^{-2x}$  есть линейно независимые решения однородного уравнения, а его общим решением является  $y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ .

Так как  $\lambda = 3$  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде  $\bar{y}(x) = e^{3x}(Ax + B)$ . Найдём производные первого и второго порядков:  $\bar{y}' = 3e^{3x}(Ax + B) + e^{3x}A$  или  $\bar{y}' = e^{3x}(3Ax + A + 3B)$ ,  $\bar{y}'' = 3e^{3x}(3Ax + A + 3B) + e^{3x}A$  или  $\bar{y}'' = e^{3x}(9Ax + 6A + 9B)$ . Подставим в неоднородное уравнение:  $e^{3x}(9Ax + 6A + 9B) + 3e^{3x}(3Ax + A + 3B) + 2e^{3x}(Ax + B) =$

$$= e^{3x} \cdot 4x \text{ или } 20Ax + 9A + 20B = 4x. \text{ Отсюда } \begin{cases} 20A = 4, \\ 9A + 20B = 0. \end{cases} \text{ Решив эту}$$

систему, найдём:  $A = \frac{1}{5}, B = -\frac{9}{100}$ . Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид  $\bar{y}(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{5}x - \frac{9}{100}\right)$ , а общим решением неоднородного уравнения является  $y(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{5}x - \frac{9}{100}\right) + C_1 e^{-x} +$

$$+ C_2 e^{-2x}.$$

**Пример 9.** Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' - 4y' - 5y = e^{5x}(x-1)$ .

**Решение.** Характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения имеет вид  $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ , и его корнями являются  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$ . Функции  $y_1 = e^{-x}$  и  $y_2 = e^{5x}$  – линейно независимые решения неоднородного уравнения, и  $y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$  есть общее решение этого уравнения.

Так как  $\lambda = 5$  – корень характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде  $\bar{y}(x) = e^{5x}x(Ax + B) = e^{5x}(Ax^2 + Bx)$ . Найдём производные первого и второго порядков:


$$\bar{y}' = 5e^{5x}(Ax^2 + Bx) + e^{5x}(2Ax + B) = e^{5x}(5Ax^2 + 5Bx + 2Ax + B),$$
$$\bar{y}'' = 5e^{5x}(5Ax^2 + 5Bx + 2Ax + B) + e^{5x}(10Ax + 5B + 2A) =$$
$$= e^{5x}(25Ax^2 + 25Bx + 20Ax + 10B + 2A). \text{ Подставим в неоднородное}$$

уравнение:  $e^{5x}(25Ax^2 + 25Bx + 20Ax + 10B + 2A) - 4e^{5x}(5Ax^2 + 5Bx + 2Ax + B) - 5e^{5x}(Ax^2 + Bx) = e^{5x}(x-1)$ . Сократим обе части этого равенства на  $e^{5x}$ , приведём подобные члены и получим  $12Ax + 2A + 6B = x - 1$ . Отсюда следует, что  $\begin{cases} 12A = 1, \\ 2A + 6B = -1. \end{cases}$  Решив данную систему, получим:  $A = \frac{1}{12}$ ,  $B = -\frac{7}{36}$ . Частным решением неоднородного уравнения является  $\bar{y}(x) = e^{5x}\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{36}x\right)$ , а общее решение этого уравнения имеет вид  $y(x) = e^{5x}\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{36}x\right) + C_1e^{-x} + C_2e^{5x}$ .

#### 10.4. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных можно применять к любому неоднородному линейному уравнению с постоянными коэффициентами независимо от вида правой части. Этот метод позволяет всегда найти общее решение неоднородного уравнения, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть  $y_1 = y_1(x)$  и  $y_2 = y_2(x)$  являются линейно независимыми решениями уравнения (2). Тогда общим решением этого уравнения является  $y_o(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Суть метода вариации произвольных постоянных состоит в том, что общее решение уравнения (1) ищется в виде

$$y_o(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \quad (9)$$



где  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  – новые неизвестные функции, которые необходимо найти. Так как неизвестных функций две, то для их нахождения необходимы два уравнения, содержащие эти функции. Эти два уравнения составляют систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = f(x), \end{cases}$$

которая является линейной алгебраической системой уравнений относительно  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$ . Решая данную систему, найдём  $C_1'(x) = \varphi_1(x)$  и  $C_2'(x) = \varphi_2(x)$ . Интегрируя обе части полученных равенств, найдём  $C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1$  и  $C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_2$ . Подставив эти выражения в уравнение (9), получим общее решение неоднородного линейного уравнения (1).

Пример 10. Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ .

Решение. Данному уравнению соответствует однородное  $y'' + 4y = 0$ , для которого уравнение  $\lambda^2 + 4 = 0$  является характеристическим с корнями  $\lambda_1 = 2i$  и  $\lambda_2 = -2i$ . В этом случае функции  $y_1 = \cos 2x$  и  $y_2 = \sin 2x$  являются линейно независимыми решениями однородного уравнения, а  $y_o(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$  является его общим решением.

Общее решение данного уравнения будем искать в виде  $y(x) = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$ . Составим систему для определения  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ :

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = \frac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Решим эту систему, используя метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2 \cos^2 2x + 2 \sin^2 2x = 2,$$



$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = \operatorname{tg} 2x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{2}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тогда } C_1(x) = \int \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2} + C_2. \quad \text{Подставим в формулу общего решения:}$$

$$y(x) = \left( -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C_1 \right) \cos 2x + \left( \frac{x}{2} + C_2 \right) \sin 2x.$$

## Лекция 11. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### 11.1. Случайные события и их классификация

**Теория вероятностей** – это раздел математики, изучающий закономерности массовых однородных случайных явлений.

Основными исходными понятиями в теории вероятностей являются понятия **испытания (опыта) и события**. Всякое действие, результат которого фиксируется, называется **испытанием (опытом)**, а результат испытания или испытаний называется **событием**. Будем говорить, что в результате испытания или испытаний происходит (наступает) событие.

**Пример 1.** Подбросим над столом монету. При этом возможны два результата: монета упадёт на стол и на верхней её грани будет «герб» или же на верхней грани монеты будет «цифра». В этом случае будем говорить: выпал «герб» или выпала «цифра». В данном примере подбрасывание монеты является испытанием, а выпадения «герба» или «цифры» являются событиями, т. е. в результате подбрасывания монеты может произойти одно из двух рассмотренных событий.

**Пример 2.** Подбросим монету два раза подряд. При этом возможны следующие события: {оба раза выпал «герб»}, {оба раза выпала «цифра»}, {первый раз выпал «герб», а второй раз – «цифра»}, {первый раз выпала «цифра», а второй раз – «герб»}.



События можно подразделить на *достоверные, невозможные и случайные*.

Событие называется *достоверным*, если при данном испытании оно обязательно произойдёт. Событие называется *невозможным*, если при данном испытании оно не может произойти. *Случайным* называется событие, которое при данном испытании может произойти или не произойти.

Пример 3. В урне находятся только красные шары. Проведём испытание – извлечём из урны один шар. Событие {извлечён красный шар} является достоверным, так как в урне только красные шары. Событие {извлечён белый шар} является невозможным, так как в урне нет белых шаров.

Пример 4. Стрелок произвёл один выстрел по мишени. При этом может произойти одно из двух событий: {есть попадание в мишень} или {нет попадания в мишень}. Оба эти события случайные.

Случайные события принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита  $A, B, C, \dots$ ; достоверные события – буквой  $U$  и невозможные – буквой  $V$ .

Случайные события подразделяются на *совместные, несовместные и единственно возможные*.

События называются *совместными*, если при одном и том же испытании наступление одного из них не исключает наступление других, т. е. они могут произойти совместно.

События называются *несовместными*, если при одном и том же испытании наступление одного из них исключает наступление других, т. е. они не могут произойти совместно.

Пример 5. По цели стреляют два стрелка. Обозначим события:

$A = \{\text{первый стрелок попал в цель}\};$

$B = \{\text{второй стрелок попал в цель}\}.$

События  $A$  и  $B$  будут совместными, так как попадание одного из стрелков в цель не исключает попадание другого.

Пример 6. Подбрасывается монета. В результате могут произойти события:

$A = \{\text{выпал «герб»}\};$

$B = \{\text{выпала «цифра»}\}.$

События  $A$  и  $B$  несовместны, так как наступление одного из них исключает наступление другого.

События называются *единственно возможными*, если при данном испытании произойдёт хотя бы одно из них. Два единственно возмож-



ных и несовместных события называются **противоположными**. Если  $A$  – некоторое событие, то ему противоположное обозначается  $\bar{A}$ . Совокупность единственно возможных и несовместных событий образует **полную группу событий**.

Пример 7. В урне находятся белые, чёрные и красные шары. Из урны извлекается один шар. Обозначим события:

$A = \{\text{извлечён белый шар}\};$

$B = \{\text{извлечён чёрный шар}\};$

$C = \{\text{извлечён красный шар}\}.$

События  $A, B, C$  являются единственно возможными.

Пример 8. Стрелок выстрелил по цели. Обозначим события:

$A = \{\text{есть попадание в цель}\};$

$\bar{A} = \{\text{нет попадания в цель}\}.$

Эти события являются противоположными.

Пример 9. Бросается игральный кубик, на гранях которого написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Эти цифры обозначают число очков. При бросании кубика на верхней его грани выпадет одна из этих цифр. Обозначим события:

$A_1 = \{\text{выпало одно очко}\};$

$A_2 = \{\text{выпало два очка}\};$

$A_3 = \{\text{выпало три очка}\};$

$A_4 = \{\text{выпало четыре очка}\};$

$A_5 = \{\text{выпало пять очков}\};$

$A_6 = \{\text{выпало шесть очков}\}.$

Эти события являются единственно возможными и несовместными. Следовательно, они образуют полную группу событий.

## 11.2. Классическое определение вероятности

События называются **равновозможными**, если при данном испытании каждое из них имеет одинаковую возможность наступить. **Элементарными** событиями называются равновозможные и единственно возможные события, которые могут наступить при данном испытании.

Пример 10. Бросается игральный кубик. Обозначим события:

$A_1 = \{\text{выпало одно очко}\};$

$A_2 = \{\text{выпало два очка}\};$



$A_3 = \{\text{выпало три очка}\};$

$A_4 = \{\text{выпало четыре очка}\};$

$A_5 = \{\text{выпало пять очков}\};$

$A_6 = \{\text{выпало шесть очков}\};$

$H = \{\text{выпало нечётное число очков}\}.$

События  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  и  $A_6$  являются равновероятными и единственно возможными, т. е. элементарными. Наступление каждого из событий  $A_1, A_3$  и  $A_5$  приводит к наступлению события  $H$ . Эти события называются *благоприятствующими* для события  $H$ .

Пусть в результате испытания может наступить конечное число  $n$  элементарных событий. Среди этих событий имеется  $k$  таких, наступление которых ведёт к наступлению некоторого события  $A$ .

**Вероятностью** события  $A$  называется отношение числа  $k$  элементарных событий, благоприятствующих для события  $A$ , к числу  $n$  всех возможных элементарных событий:  $P(A) = \frac{k}{n}$ .

Такое определение вероятности называется *классическим*.

Пример 11. Брошен игральный кубик. Найти вероятность того, что число выпавших очков будет нечётным.

Решение. Обозначим события:

$A_1 = \{\text{выпало одно очко}\};$

$A_2 = \{\text{выпало два очка}\};$

$A_3 = \{\text{выпало три очка}\};$

$A_4 = \{\text{выпало четыре очка}\};$

$A_5 = \{\text{выпало пять очков}\};$

$A_6 = \{\text{выпало шесть очков}\};$

$A = \{\text{выпало нечётное число очков}\}.$

Всех возможных элементарных событий шесть, т. е.  $n = 6$ . Благоприятствующими для  $A$  будут события  $A_1, A_3$  и  $A_5$ , т.е.  $k = 3$ . Таким

образом,  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Из классического определения вероятности следуют её *свойства*.

- Вероятность достоверного события равна единице:  $P(U) = 1$ .
- Вероятность невозможного события равна нулю:  $P(V) = 0$ .



• Вероятность случайного события  $A$  находится в интервале  $(0, 1)$ :  $0 < P(A) < 1$ .

Таким образом, вероятность любого события находится в промежутке  $[0, 1]$ .

### 11.3. Элементы комбинаторики

При непосредственном вычислении вероятности события  $A$  часто рассматриваются различные комбинации из множества  $n$  элементов по  $m$  элементов ( $m \leq n$ ).

**Перестановками** из  $n$  элементов называются всевозможные упорядоченные множества, содержащие все данные  $n$  элементов. Число всех перестановок обозначают  $P_n$  и находят по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, \text{ или } P_n = n! \text{ (} n \text{ факториал).}$$

По определению принимают  $P_0 = 0! = 1$ .

Пример 12. Какие трёхзначные числа можно образовать из неповторяющихся цифр 1, 2, 3.

Решение. 123, 132, 213, 231, 312, 321. Эти числа называются перестановками, и их шесть.

Пример 13. Сколько существует способов, чтобы расположить в один ряд на полке 6 книг?

Решение. Число перестановок  $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ .

**Размещениями** из  $n$  элементов по  $m$  элементов ( $m < n$ ) называются всевозможные упорядоченные подмножества по  $m$  элементов, образованные из данных  $n$  элементов и отличающиеся друг от друга или самими элементами, или их порядком. Обозначается число размещений из  $n$  элементов по  $m$  элементов символом  $A_n^m$  и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 14. Какие двузначные числа можно образовать из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в число только один раз?

Решение. 12, 21, 13, 31, 23, 32. Таких цифр шесть.

Пример 15. Студенты данного курса изучают 7 учебных предметов. В расписание занятий можно поставить 3 различных предмета в день. Сколько существует способов, чтобы составить расписание на один день?



Решение. Количество способов равно числу размещений из 7 элементов по 3 элемента:  $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 210$ .

**Сочетаниями** из  $n$  элементов по  $m$  элементов называются множества всех подмножеств, составленных из  $n$ -элементного множества по  $m$  элементов в каждом подмножестве, причем порядок записи элементов в подмножествах роли не играет.

Обозначается число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  элементов символом  $C_n^m$ .

Формула для вычисления числа сочетаний  $C_n^m$  имеет вид

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 16. В урне находятся 3 белых шара и 7 чёрных. Из урны наугад извлекают 2 шара. Сколько существует способов, чтобы извлечь: а) 2 белых шара; б) 2 чёрных шара; в) 1 белый шар и 1 чёрный?

Решение. а) Так как в урне белых шаров только 3, то количество способов извлечь 2 белых шара равно числу сочетаний из 3 элементов

$$\text{по 2 элемента: } C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3;$$

б) Чёрных шаров в урне 7, поэтому количество способов извлечь 2 чёрных шара равно  $C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 5!} = 21$ ;

в) Количество способов извлечь один белый шар и один чёрный равно  $C_3^1 \cdot C_7^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{7!}{1!(7-1)!} = \frac{3! \cdot 7!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 6!} = 21$ .

Пример 17. В ящике находятся 20 деталей первого сорта и 10 деталей второго сорта. Из ящика наугад берут 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажутся 3 детали первого сорта и 2 – второго.

Решение. Обозначим событие  $A = \{\text{взятыми окажутся 3 детали первого сорта и 2 – второго}\}$ . Искомая вероятность  $P(A) = \frac{k}{n}$ , где  $k$  – количество способов взять 3 детали первого сорта и 2 – второго,  $n$  –



$$\begin{aligned} & \text{количество способов взять 5 деталей из 30. Тогда } n \times k = C_{20}^3 \cdot C_{10}^2 = \\ & = \frac{20!}{3!(20-3)!} \cdot \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{20!}{3!17!} \cdot \frac{10!}{2!8!} = \frac{17! \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17!} \times \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 8!} = 6 \cdot 19 \times \\ & \times 20 \cdot 9 \cdot 5 = 102600; n = C_{30}^5 = \frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{30!}{5!25!} = \\ & = \frac{25! \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25!} = 26 \cdot 27 \cdot 7 \cdot 29 = 134386; P(A) = \frac{102600}{134386} \approx 0,763. \end{aligned}$$

### Задания для самостоятельной работы

1. В ящике 30 деталей, из которых 5 бракованных. Из ящика наугад извлечены 3 детали. Найти вероятность того, что среди них одна бракованная.

2. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная деталь и 10 нестандартных, утеряны 3 детали. Найти вероятность того, что среди них 2 стандартные детали.

3. В ящике находятся 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наугад извлекает из ящика 4 детали. Найти вероятность того, что среди них 2 окрашенные.

4. На складе хранятся в не рассортированном виде 20 изделий первого сорта и 10 изделий второго сорта. Найти вероятность того, что среди взятых наугад пяти изделий два будут первого сорта.

5. В партии, состоящей из 20 радиоприёмников, 5 имеют незначительную неисправность. Наугад берут 3 радиоприёмника. Найти вероятность того, что среди них только один имеет неисправность.

6. В ремонтную мастерскую поступили 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер произвольно выбирает 5 телевизоров. Найти вероятность того, что 2 из них нуждаются в настройке.

7. На полке лежат 12 электроламп, из которых 4 непригодны к использованию. Случайным образом отбираются 3 электролампы. Найти вероятность того, что среди отобранных 2 пригодны к использованию.

8. В магазине из 100 пар зимних сапог одной модели 20 пар коричневого цвета, а остальные – чёрного. Наугад берут 8 пар сапог. Найти вероятность того, что среди них 4 пары коричневого цвета и 4 пары – чёрного.



## Лекция 12. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

### 12.1. Сложение вероятностей

**Суммой двух совместных событий**  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , состоящее в наступлении хотя бы одного из событий  $A$  или  $B$ . Аналогично суммой нескольких совместных событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

**Суммой двух несовместных событий**  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , состоящее в наступлении или события  $A$ , или события  $B$ . Аналогично суммой нескольких несовместных событий называется событие, состоящее в наступлении какого-либо одного из этих событий.

Справедлива теорема сложения вероятностей несовместных событий: **вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий**, т. е.  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ . Эту теорему можно распространить на любое конечное число несовместных событий.

Из данной теоремы следует:

- сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице;
- сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .

**Пример 1.** В ящике находятся 2 белых, 3 красных и 5 синих шаров. Шары перемешивают и наугад извлекают один. Какова вероятность того, что шар окажется цветным?

**Решение.** Обозначим события:

$A = \{\text{извлечён цветной шар}\};$

$B = \{\text{извлечён белый шар}\};$

$C = \{\text{извлечён красный шар}\};$

$D = \{\text{извлечён синий шар}\}.$

Тогда  $A = C + D$ . Так как события  $C, D$  несовместны, то воспользуемся теоремой сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = P(C + D) = P(C) + P(D) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

**Пример 2.** В урне находятся 4 белых шара и 6 чёрных. Из урны наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что все они одного цвета?



Решение. Обозначим события:

$A = \{\text{вынуты шары одного цвета}\};$

$B = \{\text{вынуты шары белого цвета}\};$

$C = \{\text{вынуты шары чёрного цвета}\}.$

Так как  $A=B+C$  и события  $B$  и  $C$  несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий  $P(A) = P(B) + P(C)$ . Веро-

ятность события  $B$  равна  $P(B) = \frac{k}{n}$ , где  $k = C_4^3 = 4$ ,  $n = C_{10}^3 =$

$$= \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7!} = 120. \text{ Подставим } k \text{ и } n \text{ в формулу и}$$

получим  $P(B) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$ . Аналогично найдём вероятность события

$C: P(C) = \frac{k}{n}$ , где  $k = C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ ,  $n = C_{10}^3 = 120$ ,

т. е.  $P(C) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ . Тогда  $P(A) = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$ .

Пример 3. Из колоды в 36 карт наугад вынимают 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется не менее трёх тузов.

Решение. Обозначим события:

$A = \{\text{среди вынутых карт не менее трёх тузов}\};$

$B = \{\text{среди вынутых карт три туза}\};$

$C = \{\text{среди вынутых карт четыре туза}\}.$

Так как  $A=B+C$ , а события  $B$  и  $C$  несовместны, то  $P(A) = P(B) + P(C)$ . Найдём вероятности событий  $B$  и  $C$ :

$$P(B) = \frac{C_4^3 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^4} = \frac{4 \cdot 32}{\frac{36!}{4!(36-4)!}} = \frac{128}{\frac{36!}{4! \cdot 32!}} = \frac{128}{\frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{128}{58905},$$

$P(C) = \frac{C_4^4}{C_{32}^4} = \frac{1}{58905}$ . Следовательно, вероятность того, что среди

вынутых карт не менее трёх тузов, равна

$$P(A) = \frac{128}{58905} + \frac{1}{58905} = \frac{129}{58905} \approx 0,0022.$$



## 12.2. Умножение вероятностей

**Произведением** двух событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , состоящее в совместном наступлении этих событий:  $C = A \cdot B$ . Это определение распространяется на любое конечное число событий.

Два события называются **независимыми**, если вероятность наступления одного из них не зависит от того, произошло другое событие или нет. События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются **независимыми в совокупности**, если вероятность наступления каждого из них не зависит от того, произошли или не произошли другие события.

Пример 4. Два стрелка стреляют по цели. Обозначим события:

$A = \{\text{первый стрелок попал в цель}\};$

$B = \{\text{второй стрелок попал в цель}\}.$

Очевидно, что вероятность попадания в цель первым стрелком не зависит от того, попал или не попал второй стрелок, и наоборот. Следовательно, события  $A$  и  $B$  независимы.

Справедлива теорема умножения вероятностей независимых событий: **вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий**:  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ .

Эта теорема справедлива и для  $n$  независимых в совокупности событий:  $(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$ .

Пример 5. Два стрелка стреляют по одной цели. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,9, а второго – 0,7. Оба стрелка одновременно делают по одному выстрелу. Определить вероятность того, что будут иметь место два попадания в цель.

Решение. Обозначим события:

$A = \{\text{первый стрелок попадёт в цель}\};$

$B = \{\text{второй стрелок попадёт в цель}\};$

$C = \{\text{оба стрелка попадут в цель}\}.$

Так как  $C = A \cdot B$ , а события  $A$  и  $B$  независимы, то  $P(C) = P(A) \cdot P(B)$ , т. е.  $P(C) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$ .

События  $A$  и  $B$  называются **зависимыми**, если вероятность наступления одного из них зависит от того, произошло другое событие или нет. Вероятность наступления события  $A$  при условии, что событие  $B$  уже наступило, называется **условной вероятностью** и обозначается  $P(A/B)$ , или  $P_B(A)$ .

Пример 6. В урне находятся 4 белых и 7 чёрных шаров. Из урны извлекаются шары. Обозначим события:



$A = \{\text{извлечён белый шар}\};$

$B = \{\text{извлечён чёрный шар}\}.$

Перед началом извлечения шаров из урны  $P(A) = \frac{4}{11}$ . Из урны извлекли один шар и он оказался чёрным. Тогда вероятность события  $A$  после наступления события  $B$  будет уже другой, равной  $\frac{4}{10}$ . Это означает, что вероятность события  $A$  зависит от события  $B$ , т. е. эти события будут зависимыми.

Справедлива теорема умножения вероятностей зависимых событий: **вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило**, т. е.  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$ , или  $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$ .

Пример 7. В урне находятся 4 белых шара и 8 красных. Из неё наугад последовательно извлекают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут чёрными.

Решение. Обозначим события:

$A = \{\text{первым извлечён чёрный шар}\};$

$B = \{\text{вторым извлечён чёрный шар}\}.$

События  $A$  и  $B$  зависимы, так как  $P(A) = \frac{8}{12}$ , а  $P(B/A) = \frac{7}{11}$ . Тогда

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}.$$

Пример 8. Три стрелка стреляют по цели независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,5, для второго – 0,6 и для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что произойдут два попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

Решение. Обозначим события:

$A = \{\text{произойдут два попадания в цель}\};$

$B = \{\text{первый стрелок попадёт в цель}\};$

$C = \{\text{второй стрелок попадёт в цель}\};$

$D = \{\text{третий стрелок попадёт в цель}\};$

$\bar{B} = \{\text{первый стрелок не попадёт в цель}\};$

$\bar{C} = \{\text{второй стрелок не попадёт в цель}\};$

$\bar{D} = \{\text{третий стрелок не попадёт в цель}\}.$



По условию примера  $P(B) = 0,5$ ,  $P(C) = 0,6$ ,  $P(D) = 0,8$ ,  
 $P(\bar{B}) = 1 - 0,5 = 0,5$ ,  $P(\bar{C}) = 1 - 0,6 = 0,4$ ,  $P(\bar{D}) = 1 - 0,8 = 0,2$ . Так как  
 $A = \bar{B} \cdot C \cdot D + B \cdot \bar{C} \cdot D + B \cdot C \cdot \bar{D}$ , то, используя теорему сложения веро-  
ятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей  
независимых событий, получим:

$$P(A) = P(\bar{B})P(C)P(D) + P(B)P(\bar{C})P(D) + P(B)P(C)P(\bar{D}) = \\ = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0,24 + 0,16 + 0,06 = 0,46 .$$

Пусть события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  образуют полную группу событий  
некоторого испытания, а событие  $A$  может наступить только с одним  
из этих событий. Если известны вероятности  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$   
и условные вероятности  $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$  события  $A$ ,  
то вероятность события  $A$  вычисляется по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n), \text{ или}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i). \text{ Эта формула называется } \textit{формулой полной}$$

*вероятности*, а события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  – *гипотезами*.

Пример 9. На сборочный конвейер поступает 700 деталей с пер-  
вого станка и 300 деталей – со второго. Первый станок даёт 0,5 %  
брака, а второй – 0,7 %. Найти вероятность того, что взятая деталь бу-  
дет бракованной.

Решение. Обозначим события:

$$A = \{\text{взятая деталь будет бракованной}\};$$

$$H_1 = \{\text{деталь изготовлена на первом станке}\};$$

$$H_2 = \{\text{деталь изготовлена на втором станке}\}.$$

Вероятность того, что деталь изготовлена на первом станке, равна

$$P(H_1) = \frac{700}{700+300} = 0,7. \text{ Для второго станка } P(H_2) = \frac{300}{700+300} = 0,3.$$

По условию вероятность получения бракованной детали, изготовлен-  
ной на первом станке,  $P(A/H_1) = 0,005$ . Для второго станка  
 $P(A/H_2) = 0,007$ . Тогда вероятность того, что взятая деталь будет  
бракованной, вычисляется по формуле полной вероятности  
 $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,7 \cdot 0,005 + 0,3 \cdot 0,007 =$   
 $= 0,0035 + 0,0021 = 0,0056.$



Если известно, что в результате испытания наступило некоторое событие  $A$ , то вероятность того, что это событие наступило с гипотезой  $H_i$ , равна  $P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$ , где  $P(A)$  – полная вероятность события  $A$ . Эта формула называется **формулой Байеса** и позволяет вычислять вероятности событий  $H_i$  после того, как стало известно, что событие  $A$  уже наступило.

**Пример 10.** Однотипные детали к автомобилям производятся на двух заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 80 % общего количества деталей, а второй – 20 %. Продукция первого завода содержит 90 % стандартных деталей, а второго – 95 %. Покупатель купил одну деталь и она оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на втором заводе.

**Решение.** Обозначим события:

$A = \{\text{куплена стандартная деталь}\};$

$H_1 = \{\text{деталь изготовлена на первом заводе}\};$

$H_2 = \{\text{деталь изготовлена на втором заводе}\}.$

По условию примера  $P(H_1) = 0,8$ ,  $P(H_2) = 0,2$ ,  $P(A / H_1) = 0,9$  и  $P(A / H_2) = 0,95$ . Вычислим полную вероятность события  $A$ :  $P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) = 0,8 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,95 = 0,91$ .

Вероятность того, что деталь изготовлена на втором заводе, вычислим по формуле Байеса:  $P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,95}{0,91} \approx 0,209$ .

### Задания для самостоятельной работы

1. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7 и для третьего – 0,9. Стрелки произвели по одному выстрелу. Найти вероятность того, что имеет место не менее двух попаданий в цель.

2. В ремонтную мастерскую поступили 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждаются в замене двигателя, а остальные – в замене отдельных узлов. Случайным образом отбираются 3 трактора. Найти вероятность того, что замена двигателя необходима не более чем двум отобраным тракторам.



3. На железобетонном заводе изготавливают панели, 80 % из которых высшего качества. Найти вероятность того, что из трёх наугад выбранных панелей не менее двух будут высшего сорта.

4. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, высшего качества, равна 0,7, вторым – 0,8 и третьим – 0,6. Для контроля наугад взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Найти вероятность того, что не менее двух из них будут высшего качества.

5. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3 и третьего – 0,25. Имеются по одному билету каждого выпуска. Найти вероятность того, что выиграет не менее двух билетов.

6. Бухгалтер выполняет расчёты, пользуясь тремя справочниками. Вероятность того, что интересующие его данные находятся в первом справочнике, равна 0,6, во втором – 0,7 и в третьем – 0,8. Найти вероятность того, что интересующие бухгалтера данные содержатся не более чем в двух справочниках.

7. Три автомата изготавливают детали. Первый автомат изготавливает деталь высшего качества с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,7 и третий – с вероятностью 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что среди них не менее двух высшего качества.

8. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность изготовления нестандартной детали для первого станка равна 0,03, для второго – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте. Среди них 67 % с первого станка, а остальные – со второго. Наугад взятая деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

9. В мастерскую поступили две коробки однотипных конденсаторов. В первой коробке было 20 конденсаторов, из которых 2 неисправных. Во второй коробке 10 конденсаторов, из которых 3 неисправных. Конденсаторы были переложены в один ящик. Найти вероятность того, что наугад взятый из ящика конденсатор окажется исправным.

10. На трёх станках изготавливают однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Среди всех деталей 20 % с первого автомата, 30 % - со второго и 50 % – с третьего. Вероятность изготовления стандартной детали на первом станке равна 0,8, на втором – 0,6 и на третьем – 0,7. Взятая деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на третьем станке.



11. Комплектовщик получает для сборки 40 % деталей с завода  $A$ , а остальные – с завода  $B$ . Вероятность того, что деталь с завода  $A$  высшего качества, равна 0,8, а с завода  $B$  – 0,9. Комплектовщик наугад взял одну деталь, и она оказалась не высшего качества. Найти вероятность того, что эта деталь с завода  $B$ .

12. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 студентов из первой группы и 8 – из второй. Вероятность того, что студент из первой группы попадёт в сборную академии, равна 0,8, а со второй – 0,7. Наугад выбранный студент попал в сборную. Найти вероятность того, что он из первой группы.

### 12.3. Формула Бернулли

Испытания называются *независимыми*, если при каждом из них событие  $A$  наступает с одной и той же вероятностью  $P(A) = p$ , не зависящей от того, появилось или не появилось это событие в других испытаниях. Вероятность противоположного события  $\bar{A}$  в этом случае равна  $q = 1 - p$ .

Пример 11. Бросается игральный кубик  $n$  раз. Обозначим событие  $A = \{\text{выпадение трёх очков}\}$ . Вероятность наступления события  $A$  в каждом испытании равна  $\frac{1}{6}$  и не зависит от того, произошло или не произошло это событие в других испытаниях. Поэтому эти испытания являются независимыми. Вероятность противоположного события  $\bar{A} = \{\text{невпадение трёх очков}\}$  равна  $P(\bar{A}) = q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .

Вероятность того, что в  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события  $A$  равна  $p$ , событие наступит ровно  $k$  раз (безразлично, в какой последовательности), вычисляется по формуле  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ , где  $q = 1 - p$ . Эта формула называется *формулой Бернулли*. Применяется она в том случае, если число испытаний  $n$  не слишком велико.

Пример 12. Доля плодов, заражённых болезнью в скрытой форме, составляет 25 %. Случайным образом отбирается 6 плодов. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется: а) ровно 3 заражённых плода; б) не более 2 заражённых плодов.

Решение. По условию примера  $n = 6, p = 0,25, q = 0,75$ .



а) По формуле Бернулли вероятность того, что среди 6 отобранных плодов заражёнными окажутся ровно 3, равна

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^{6-3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^3 = \frac{6!}{3!3!} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^3 = \\ = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^3 = 20 \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^3 \approx 0,132.$$

б) Обозначим событие  $A = \{\text{заражённых будет не более 2 плодов}\}$ . Тогда  $P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2)$ . По формуле Бернулли:

$$P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = 1 \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^6 \approx 0,178;$$

$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = 6 \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^5 \approx 0,356;$$

$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6!}{2!4!} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^4 \approx 0,297.$$

Следовательно,  $P(A) \approx 0,178 + 0,356 + 0,297 = 0,831$ .

#### 12.4. Теоремы Лапласа и Пуассона

По формуле Бернулли находится вероятность того, что событие  $A$  наступит  $k$  раз в  $n$  независимых испытаниях и в каждом испытании вероятность события  $A$  постоянна. При больших значениях  $n$  применение формулы Бернулли становится трудоёмким. В этом случае для вычисления вероятности события  $A$  целесообразнее использовать локальную и интегральную теоремы Лапласа.

**Локальная теорема Лапласа.** Пусть вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы. Тогда вероятность того, что событие  $A$  наступит ровно  $k$  раз при достаточно большом числе  $n$  испытаний, вычисляется по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \text{ а значения функции } \varphi(x) \text{ приведены}$$

в специальной таблице (прил. 1).

Функция  $\varphi(x)$  имеет следующие основные свойства:

- функция  $\varphi(x)$  определена и непрерывна в интервале  $(-\infty, +\infty)$ ;
- функция  $\varphi(x)$  положительна, т. е.  $\varphi(x) > 0$ ;
- функция  $\varphi(x)$  чётная, т. е.  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ .



Так как функция  $\varphi(x)$  чётная, то в таблице (прил.1) приведены её значения только для положительных значений  $x$ .

Пример 13. Всхожесть семян пшеницы составляет 80 %. Для опыта отбирается 100 семян. Найти вероятность того, что из отобранных семян взойдут ровно 90.

Решение. По условию примера  $n = 100$ ,  $k = 90$ ,  $p = 0,8$ ,  $q = 1 - 0,8 = 0,2$ . Тогда  $x = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{10}{4} = 2,5$ . По таблице (прил. 1) найдём

значение функции  $\varphi(x)$ :  $\varphi(2,5) = 0,0175$ . Вероятность того, что из отобранных семян взойдут ровно 90, равна  $P_{100}(90) \approx \frac{0,0175}{4} = 0,0044$ .

При решении практических задач возникает необходимость найти вероятность наступления события  $A$  при  $n$  независимых испытаниях не менее  $k_1$  раз и не более  $k_2$  раз. Такая задача решается с помощью **интегральной теоремы Лапласа**: пусть вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом из  $n$  независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, тогда вероятность того, что событие наступит не менее  $k_1$  раз и не более  $k_2$  раз при достаточно большом числе испытаний, вычисляется по формуле

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция  $\Phi(x)$  называется **функцией Лапласа**. Она не выражается через элементарные функции. Значения этой функции приведены в таблице (прил. 2).

Функция  $\Phi(x)$  имеет следующие основные свойства:

- $\Phi(0) = 0$ ;
- функция  $\Phi(x)$  возрастает в интервале  $(-\infty, +\infty)$ ;
- $\Phi(x) \rightarrow 0,5$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;
- функция  $\Phi(x)$  нечётная, т. е.  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .

Пример 14. Предприятие выпускает продукцию, из которой 13 % не высшего качества. Определить вероятность того, что в непроверенной партии из 150 единиц продукции высшего качества будет не менее 125 и не более 135.



Решение. Обозначим  $n = 150, k_1 = 125, k_2 = 135, p = 0,87, q = 0,13$ .

$$\begin{aligned} \text{Вычислим } x_1 &= \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{125 - 150 \cdot 0,87}{\sqrt{150 \cdot 0,87 \cdot 0,13}} = -1,37, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \\ &= \frac{135 - 150 \cdot 0,87}{\sqrt{150 \cdot 0,87 \cdot 0,13}} = 1,12. \text{ Тогда } P_{150}(125 \leq k \leq 135) \approx \\ &\approx \Phi(1,12) - \Phi(-1,37) = \Phi(1,12) + \Phi(1,37) = 0,3686 + 0,4147 = 0,7833. \end{aligned}$$

Если число  $n$  испытаний достаточно велико, а вероятность  $p$  наступления события  $A$  в независимых испытаниях мала, то для нахождения вероятности  $P_n(k)$  используется **теорема Пуассона**: если в  $n$  независимых испытаниях вероятность  $p$  наступления события  $A$  в каждом из них постоянна и мала, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что событие  $A$  наступит  $k$  раз, вычисляется по формуле  $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ , где  $\lambda = np$ .

Эта формула называется **формулой Пуассона**.

Пример 15. Вероятность попадания в самолёт при каждом выстреле из пулемёта равна 0,001. Производится 3000 выстрелов. Найти вероятность попадания в самолёт: а) один или два раза; б) хотя бы один раз.

Решение. По условию примера  $n = 3000, p = 0,001, \lambda = np = 3$ .

а) Обозначим событие  $A = \{\text{попадание в самолёт один или два раза}\}$ .

$$\text{Тогда } P(A) = P_{3000}(1) + P_{3000}(2) \approx \frac{3}{1!} e^{-3} + \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0,3734.$$

б) Обозначим событие  $B = \{\text{попадание в самолёт хотя бы один раз}\}$ .

$$\text{Тогда } P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P_{3000}(0) \approx 1 - \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 0,9602.$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что экзамен сдадут не менее четырёх студентов.

2. Вероятность поражения в каждой шахматной партии для игрока равна 0,4. Найти вероятность того, что он выиграет в шести партиях не менее трёх раз.



3. После обработки шестерён у рабочего в среднем получается 20 % нестандартных шестерён. Найти вероятность того, что среди взятых шести шестерён нестандартных будет не более трёх.

4. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80 % высшего сорта. Найти вероятность того, что среди семи изделий, взятых наугад, изделий высшего сорта будет не менее пяти.

5. Всхожесть семян данного растения равна 0,8. Найти вероятность того, что из 900 высаженных семян число проросших будет от 720 до 830.

6. На керамическом заводе 90 % тарелок выпускается продукцией первого сорта. ОТК должен проверить партию из 600 изготовленных тарелок. Найти вероятность того, что первосортных из них окажется не менее 550.

7. При установившемся технологическом процессе 60 % изготавливаемых заводом изделий выпускается высшего качества. Приёмщик наугад берёт 200 изделий. Найти вероятность того, что среди них 140 изделий будут высшего качества.

8. Вероятность останова каждой из 100 работающих машин равна 0,2. Найти вероятность одновременного останова не более 30 машин.

9. Известно, что на данном предприятии брак при изготовлении деталей составляет 0,6 %. В сборочный цех поступила партия из 500 деталей. Найти вероятность того, что среди них бракованных будет не более пяти.

## Лекция 13. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

### 13.1. Дискретные и непрерывные случайные величины

Одним из основных понятий в теории вероятностей является понятие случайной величины. *Случайной величиной* называется величина, которая в результате испытания из множества возможных своих значений принимает только одно, причём заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины бывают *дискретными и непрерывными*. *Дискретной случайной величиной (ДСВ)* называется случайная величина, которая может принимать конечное число изолированных друг от друга значений, т. е. если возможные значения этой величины можно пересчитать. *Непрерывной случайной величиной (НСВ)* называется



ся случайная величина, все возможные значения которой сплошь заполняют некоторый числовой промежуток.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита:  $X, Y, Z$  и т. д. Возможные значения случайных величин обозначаются соответствующими малыми буквами.

Запись  $P(X = 5) = 0,28$  означает: «вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, равное 5, равна 0,28».

**Пример 1.** Один раз бросают игральный кубик. При этом могут выпасть цифры от 1 до 6, обозначающие число очков. Обозначим случайную величину  $X = \{\text{число выпавших очков}\}$ . Эта случайная величина в результате испытания может принять только одно из шести значений: 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Следовательно, случайная величина  $X$  есть ДСВ.

**Пример 2.** При бросании камня он пролетает некоторое расстояние. Обозначим случайную величину  $X = \{\text{расстояние полёта камня}\}$ . Эта случайная величина может принять любое, но только одно, значение из некоторого промежутка. Следовательно, случайная величина  $X$  есть НСВ.

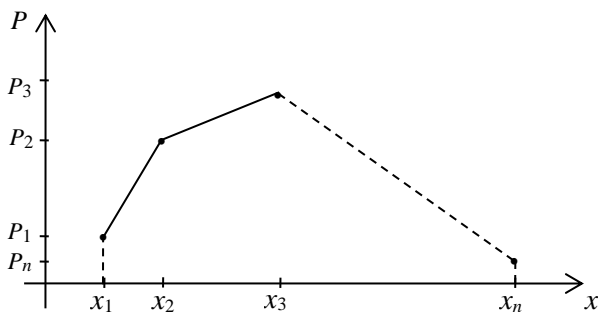
### 13.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Дискретная случайная величина характеризуется значениями, которые она может принимать, и вероятностями, с которыми эти значения принимаются. Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и соответствующими им вероятностями называется **законом распределения дискретной случайной величины**.

Если известны все возможные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  случайной величины  $X$  и вероятности  $p_1, p_2, \dots, p_n$  появления этих значений, то считают, что закон распределения ДСВ  $X$  известен и он может быть записан в виде таблицы:

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$	$\sum p_i = 1$
$P(X = x_i) = p_i$	$p_1$	$p_2$		$p_i$		$p_n$	

Закон распределения ДСВ можно изобразить графически, если в прямоугольной системе координат изобразить точки  $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)$  и соединить их отрезками прямых линий. Полученная фигура называется многоугольником распределения.



Пример 3. В зерне, предназначенном для очистки, содержится 10 % сорняков. Наугад отобраны 4 зерна. Обозначим случайную величину  $X = \{\text{число сорняков среди четырёх отобранных}\}$ . Построить закон распределения ДСВ  $X$  и многоугольник распределения.

Решение. По условию примера  $n = 4, p = 0,1, q = 0,9$ . Тогда:

$$p_1 = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^4 = 0,6561;$$

$$p_2 = P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^3 = 0,2916;$$

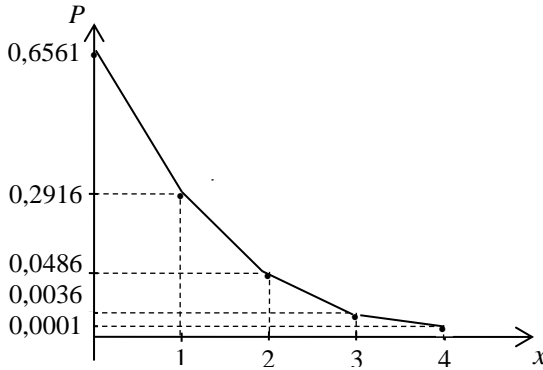
$$p_3 = P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486;$$

$$p_4 = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = 4 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^1 = 0,0036;$$

$$p_5 = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 1 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^0 = 0,0001.$$

Запишем закон распределения ДСВ  $X$  в виде таблицы и построим многоугольник распределения:

$X$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i) = p_i$	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001



### 13.3. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Наиболее важные свойства дискретной случайной величины описываются её характеристиками. Одной из таких характеристик является **математическое ожидание** случайной величины.

Пусть известен закон распределения ДСВ  $X$ :

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$	$\sum p_i = 1$
$P(X = x_i) = p_i$	$p_1$	$p_2$		$p_i$		$p_n$	

**Математическим ожиданием** ДСВ  $X$  называется сумма произведений каждого значения этой величины на соответствующую вероятность:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

Математическое ожидание случайной величины приближённо равно среднему арифметическому всех её значений. Поэтому в практических задачах часто за математическое ожидание принимают среднее значение этой случайной величины.

**Пример 4.** Стрелок выбивает 4, 8, 9 и 10 очков с вероятностями 0,1; 0,45; 0,3 и 0,15. Найти математическое ожидание числа очков при одном выстреле.

**Решение.** Обозначим случайную величину  $X = \{\text{число выбитых очков}\}$ . Тогда  $M(X) = 4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,45 + 9 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,15 = 8,2$ . Таким обра-



зом, ожидаемое среднее значение числа выбитых очков при одном выстреле равно 8,2, а при 10 выстрелах – 82.

Математическое ожидание имеет следующие основные свойства:

- $M(C) = C$  ;
- $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$  ;
- $a \leq M(X) \leq b$  , где  $a = \min(x_i)$  ,  $b = \max(x_i)$  ;
- $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$  ;
- $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$  , где  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины.

личины.

Разность  $X - M(X)$  называется **отклонением** случайной величины  $X$  от её математического ожидания. Эта разность является случайной величиной и её математическое ожидание равно нулю, т. е.  $M(X - M(X)) = 0$  .

### 13.4. Дисперсия дискретной случайной величины

Для характеристики случайной величины, кроме математического ожидания, используется и дисперсия, которая даёт возможность оценить рассеяние (разброс) значений случайной величины около её математического ожидания. При сравнении двух однородных случайных величин с равными математическими ожиданиями «лучшей» считается та величина, которая имеет меньший разброс, т. е. меньшую дисперсию.

**Дисперсией** случайной величины  $X$  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:  $D(X) = M((X - M(X))^2)$  .

В практических задачах для вычисления дисперсии используют равносильную формулу  $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$  .

Дисперсия имеет следующие основные свойства:

- $D(C) = 0$  ;
- $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$  ;
- $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$  , где  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины.

личины.

Дисперсия характеризует разброс случайной величины около её математического ожидания и, как видно из формулы, измеряется в



квадратных единиц по сравнению с единицами самой случайной величины. Поэтому для согласования единиц измерения разброса случайной величины с единицами измерения самой величины вводится **среднее квадратическое отклонение**  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

Пример 5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение ДСВ  $X$ , заданной законом распределения:

$X$	-5	2	3	4
$P_i$	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Дисперсия ДСВ  $X$  вычисляется по формуле  $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ . Найдём математическое ожидание данной случайной величины:  $M(X) = -5 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 = -0,3$ .  
Запишем закон распределения для случайной величины  $X^2$ :

$X^2$	25	4	9	16
$P_i$	0,4	0,3	0,1	0,2

$$\text{Тогда } M(X^2) = 25 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,2 = 15,3,$$
$$D(X) = 15,3 - (-0,3)^2 = 15,21, \quad \sigma(X) = \sqrt{15,21} \approx 3,9.$$

### Задания для самостоятельной работы

1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наугад взяты 4 детали. Случайная величина  $X = \{\text{число стандартных деталей среди взятых}\}$ . Составить закон распределения этой случайной величины и найти  $M(X), D(X), \sigma(X)$ .

2. Всхожесть семян пшеницы составляет 90 %. Наугад взяты и посеяны 3 зерна. Случайная величина  $X = \{\text{число взошедших зёрен}\}$ . Составить закон распределения этой случайной величины и найти  $M(X), D(X), \sigma(X)$ .

3. Стрелок выстрелил по мишени 4 раза. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,7. Случайная величина  $X = \{\text{число попаданий в мишень}\}$ . Составить закон распределения этой случайной величины и найти  $M(X), D(X), \sigma(X)$ .



4. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка равна 0,4, для второго – 0,5 и для третьего – 0,3. Случайная величина  $X = \{\text{число станков, вышедших из строя в течение смены}\}$ . Составить закон распределения этой случайной величины и найти  $M(X), D(X), \sigma(X)$ .

5. Монета подбрасывается 4 раза. Случайная величина  $X = \{\text{число выпадений «герба»}\}$ . Составить закон распределения этой случайной величины и найти  $M(X), D(X), \sigma(X)$ .



## ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения функции  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2526	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1985	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804



1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0112	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001



Значения функции  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1,19	0,3830
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910	1,20	0,3849
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944
0,09	0,0359	0,48	0,1884	0,87	0,3078	1,26	0,3962
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3839
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049
0,15	0,0596	0,54	0,2954	0,93	0,3238	1,32	0,4066
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,4131
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0,4147
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0,99	0,3389	1,38	0,4162
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461	1,41	0,4207
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1,42	0,4222
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508	1,43	0,4236
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4313
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665	1,50	0,4332
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4335
0,35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,53	0,4370
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3749	1,54	0,4382
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394





Окончание прил. 2

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,56	0,4406	1,82	0,4656	2,16	0,4846	2,68	0,4963
1,57	0,4418	1,83	0,4664	2,18	0,4854	2,70	0,4965
1,58	0,4429	1,84	0,4671	2,20	0,4861	2,72	0,4967
1,59	0,4441	1,85	0,4678	2,22	0,4868	2,74	0,4969
1,60	0,4452	1,86	0,4686	2,24	0,4875	2,76	0,4971
1,61	0,4463	1,87	0,4693	2,26	0,4881	2,78	0,4973
1,62	0,4474	1,88	0,4699	2,28	0,4887	2,80	0,4974
1,63	0,4484	1,89	0,4706	2,30	0,4893	2,82	0,4976
1,64	0,4495	1,90	0,4713	2,32	0,4898	2,84	0,4977
1,65	0,4505	1,91	0,4719	2,34	0,4904	2,86	0,4979
1,66	0,4515	1,92	0,4726	2,36	0,4909	2,88	0,4980
1,67	0,4525	1,93	0,4732	2,38	0,4913	2,90	0,4981
1,68	0,4535	1,94	0,4738	2,40	0,4918	2,92	0,4982
1,69	0,4545	1,95	0,4744	2,42	0,4922	2,94	0,4984
1,70	0,4554	1,96	0,4750	2,44	0,4927	2,96	0,4985
1,71	0,4564	1,97	0,4756	2,46	0,4931	2,98	0,4986
1,72	0,4573	1,98	0,4761	2,48	0,4934	3,00	0,49865
1,73	0,4582	1,99	0,4767	2,50	0,4938	3,20	0,49931
1,74	0,4591	2,00	0,4772	2,52	0,4941	3,40	0,49966
1,75	0,4599	2,02	0,4783	2,54	0,4945	3,60	0,499841
1,76	0,4608	2,04	0,4793	2,56	0,4948	3,80	0,499928
1,77	0,4616	2,06	0,4803	2,58	0,4951	4,00	0,499968
1,78	0,4625	2,08	0,4812	2,60	0,4953	4,50	0,499997
1,79	0,4633	2,10	0,4821	2,62	0,4956	5,00	0,499999
1,80	0,4641	2,12	0,4830	2,64	0,4959		
1,81	0,4649	2,14	0,4838	2,66	0,4961		

Приложение 3

Значения функции  $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k	λ					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1	2	3	4	5	6	7
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004





Продолжение прил. 3

$k$	$\lambda$					
	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
1	8	9	10	11	12	13
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,10008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7				0,0001	0,0034	0,0216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10						0,0008
11						0,0002
12						0,0001

Окончание прил. 3

$k$	$\lambda$					
	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
1	14	15	16	17	18	19
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17			0,0001	0,0006	0,0021	0,0058

